Departamento de Educação da Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa

O COMPUTADOR NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA
UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 10º ANO DE ESCOLARIDADE

MANUEL JOAQUIM FÉLIX DA SILVA SARAIVA
Licenciado em Matemática (Ramo Ensino)
Universidade Clássica de Lisboa

Tese Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação

Professor Orientador: João Pedro Mendes da Ponte

1991

M

Professor João Pedro por tudo Manuel J. F. S. Sara

AGRADECIMENTOS

A concretização deste trabalho não teria sido possível sem a conjugação de um conjunto de condições favoráveis e sem o apoio obtido de muitas pessoas e instituições.

Agradeço, especialmente:

ao Professor Doutor João Pedro da Ponte, pela orientação, apoio e crítica, muito fundamentadas no seu saber e na sua prática diária, que com o seu estímulo e enorme disponibilidade muito facultou a realização deste estudo;

aos alunos do 10º D e 10º J, 89/90, da Amato Lusitano, pelo brilhante trabalho que realizaram recheado de alegria, criatividade, crítica e assiduidade;

aos professores Armindo e Salvado, pela sua disponibilidade, empenho e ajuda;

ao Eduardo Veloso, pelo LOGO.GEOMETRIA, pelo apoio na elaboração do GVA e pelo seu entusiasmo contangiante;

ao João Filipe, pelo seu incentivo e apoio bibliográfico;

ao Conselho Científico da Universidade da Beira Interior, pela dispensa de serviço lectivo durante um semestre;

ao Conselho Directivo da Escola Secundária de Amato Lusitano, Castelo Branco, por todas as facilidades que proporcionou para a realização deste trabalho;

ao Pólo do Projecto Minerva da Escola Superior de Educação de Castelo Branco, pelas condições que criou para a organização desta experiência;

ao Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa, pela leccionacção do Curso de Mestrado;

aos elementos e funcionários do Pólo e do Núcleo do Projecto Minerva do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, pelo apoio dado, muito particularmente na última fase;

ao Bernardes e ao Fernando, pela sua amizade e apoio logístico;

a todos os meus amigos e colegas, pelo seu encorajamento;

aos meus pais, irmãs e sobrinhos pelo seu enorme apoio e incentivo;

à Maria da Graça e à Sandra, que foram uma autêntica fonte de inspiração, apoio e estímulo para levar o trabalho até ao fim.

ÍNDICE

Página

Agradecimentos iii

Lista de Figuras viii

Lista de Tabelas x

CAPÍTULO 1

O OBJECTIVO DO ESTUDO E O SEU ENQUADRAMENTO 1

Formulação do Problema 1

A Geometria e o seu Ensino e
a Actividade de Demonstração 1

As Potencialidades Educativas dos Computadores 11

"Software" Educativo para a Geometria 12

O Programa Educacional LOGO.GEOMETRIA 13

A Abordagem Pedagógica de Exploração e Descoberta,
os Conceitos e os Problemas 16

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA 19

Aprendizagem de Conceitos 19

Formulação e Resolução de Problemas 25

Provas e Demonstrações 34

Atitudes e Concepções 46

O Computador na Matemática e no seu
Ensino/Aprendizagem 49

Página

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA 61

As Grandes Opções Metodológicas do Estudo 61

Participantes 63

Proposta Pedagógica 64

Materiais 69

Instrumentos 76

Análise dos Dados 79

CAPÍTULO 4

DESCRIÇÃO GERAL DAS ACTIVIDADES DESENVOLVIDAS 81

CAPÍTULO 5

EFEITOS OBSERVADOS DAS ACTIVIDADES DESENVOLVIDAS 155

A Construção de Conceitos e de

Relações Matemáticas 155

A Capacidade de Formulação e Resolução

de Problemas 176

A Compreensão da Necessidade e da

Utilidade das Demonstrações 200

Atitudes e Concepções Relativamente à Matemática

e ao Processo de Aprendizagem 217

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES 245

Página

BIBLIOGRAFIA 259

ANEXOS

Anexo 1 263

Anexo 2 269

Anexo 3 281

Anexo 4 283

Anexo 5 285

LISTA DE FIGURAS

		Página
Figura	1	8
Figura	2	10
Figura	3	85
Figura	4	92
Figura	5	96
Figura	6	98
Figura	7	98
Figura	8	106
Figura	9	112
Figura	10	115
Figura	11	116
Figura	12	118
Figura	13	119
Figura	14	127
Figura	15	136
Figura	16	139
Figura	17	145
Figura	18	148
Figura	19	152
Figura	20	161
Figura	21	164
Figura	22	174
Figura	23	193
Figura	24	195
Figura	25	197

Página

Figura 26 199

Figura 27 206

LISTA DE TABELAS

Página

Tabela 1 223

Tabela 2 223

Tabela 3 224

Tabela 4 229

Tabela 5 233

C A P Í T U L O 1

O OBJECTIVO DO ESTUDO E O SEU ENQUADRAMENTO

Formulação do Problema

Com este estudo pretende-se analisar as potencialidades educativas do programa educacional LOGO.GEOMETRIA, numa versão especialmente preparada para apoiar a aprendizagem da Geometria Vectorial e Analítica, utilizando-o numa perspectiva pedagógica que valoriza as actividades de exploração e descoberta, para promover nos alunos:

a) a construção de conceitos e de relações matemáticas;

b) a capacidade de formulação e resolução de problemas;

c) a compreensão da necessidade e utilidade das demonstrações;

d) novas atitudes e concepções relativamente à Matemática e ao seu papel na aprendizagem desta disciplina.

A Geometria e o seu Ensino e a Actividade de Demonstração

O pensamento matemático não se desenvolve de modo puramente formal nem se baseia exclusivamente em definições, axiomas e demonstrações, mas é também constituído por generalizações a partir de observações, por argumentos indutivos e analógicos bem como pela construção de conceitos matemáticos a partir de situações concretas. A apresentação da Matemática duma forma sistematizada e dedutiva poderá levar os alunos a ver que todos os passos da exposição estão correctos, todavia, eles irão ter grandes dificuldades em entender "o fio condutor" da argumentação (a origem, o objectivo e a conexão de todo o argumento) pois, muitas vezes, a ordem da apresentação é exactamente a inversa da seguida no processo de invenção. O aluno poderá memorizar os detalhes um a um mas não terá uma compreensão global da situação em causa.

A Geometria (Geo (Terra) + Metria (medida)) é o ramo da Matemática que estuda as propriedades, medidas e relações entre Pontos, Linhas, Ângulos, Superfícies e Sólidos.

Historicamente poder-se-á considerar a Geometria como tendo origem no antigo Egipto (Papyrus de Ahmes, 1700 anos A.C.), fruto de uma relação muito grande entre as características das águas do Nilo (cheias,...) e a intuição, experimentação e aproximação dos habitantes do vale deste rio africano. Foi, contudo, na antiga Grécia, com Thales de Mileto (640-546 anos A.C) que se demonstrou pela primeira vez a veracidade de uma relação geométrica mostrando-se que ela seguiria uma certa forma lógica e ordenada a partir de um conjunto de proposições universalmente aceites (axiomas e postulados). Euclides (300 anos A.C.) escreveu, em Alexandria, 13 livros, os Elementos, com a maior parte do conhecimento matemático da época. Destes, 7 foram dedicados à Geometria, onde foi feita uma sistematização, em que os vários temas e teoremas foram rearranjados e numerados.

"Com o advento dos romanos, a Matemática nada progrediu, não se lhes conhecendo qualquer matemático ao longo dos doze séculos da sua história. Depois dos gregos foram os hindus e os árabes que deram algum impulso à Matemática devendo-se aos segundos a larga difusão da ciência grega através de numerosas traduções e comentários das obras mais famosas" (Dias Agudo, 1989, p. 6).

Durante os séculos 12 e 13 da nossa era, os Elementos foram traduzidos para o Latim e outras línguas da Europa e o ensino da Geometria foi introduzido no currículo das escolas dos mosteiros.

A Geometria Euclideana (Elementar) tem, desde os primeiros tempos, uma ligação muito grande com a descrição do espaço no qual o Homem vive. O seu aprofundamento crítico ao longo dos séculos, levou ao surgimento de outras Geometrias com novos métodos e resultados que, continuando a servir para descrever o espaço onde vivemos, muito têm contribuído para o desenvolvimento da Matemática e das outras ciências. Coube a Pierre de Fermat (1601-1665) e a René Descartes (1596-1650) a junção da Álgebra que tinha vindo a ser desenvolvida pelos Árabes, baseada nas ideias Babilónicas e Hindus, e a Geometria dos Gregos, dando origem à Geometria Analítica. Atribui-se a René Descartes a primeira publicação sobre o assunto na sua obra Discurso do Método (1637). A Geometria Analítica aplica os poderosos métodos da Algebra à Geometria. Trata-se de um método de estudar figuras geométricas, quer planas, quer superfícies a três dimensões, quer, por uma natural extensão, figuras geométricas de maiores dimensões. A ideia fundamental da Geometria Analítica é estudar uma figura geométrica através da relação existente entre as coordenadas dos pontos que a compõem. Podemos descrever a figura como um conjunto de pontos que satisfazem algumas condições geométricas. Estas podem ser traduzidas por equações algébricas que relacionam as coordenadas de cada um dos pontos da figura. Assim, na Geometria plana, o ponto A(x1,y1) é o ponto cuja posição está definida pelo par de coordenadas (x1, y1) relativamente a um sistema de eixos XOY. Por outro lado, a equação f(x,y) = 0 representará uma determinada curva plana em relação a XOY. "Os dois ramos da Matemática passam a ajudar-se mutuamente e quase se confundem, o que em tudo reveste em extraordinário progresso para a Matemática e para as Ciências afins" (Silva, 1965, p. 6).

Durante muitos séculos os matemáticos pretenderam (em vão) obter o 5º postulado de Euclides "por um ponto exterior a uma recta só passa uma única recta paralela àquela" como consequência dos outros nove postulados dos Elementos. Este postulado entra em choque com a observação visual do mundo que nos rodeia - lembremo-nos dos dois carris de uma linha férrea que parecem encontrar-se no horizonte. No século 19 mostrou-se que poderia ser criada uma Geometria consistente utilizando todos os postulados de Euclides mas substituindo o 5º postulado por outras proposições - ficando assim demonstrada a sua independência em relação aos restantes postulados. Janos Bolyai (1830) e Nicolai I. Lobachevsky (1793-1856) construiram uma das Geometrias Não-Euclideanas considerando o postulado "Muitas paralelas podem ser traçadas a uma recta por um ponto exterior a ela" como alternativa ao 5º postulado de Euclides. Por seu lado, em 1854, Bernhard Riemann construiu uma outra Geometria Não-Euclideana usando como postulado alternativo ao 5º de Euclides o seguinte "Nenhuma linha paralela pode ser traçada a uma outra a partir de um ponto exterior a esta". Com estas Geometrias o Homem vê a sua noção de espaço à luz de uma verdade com possibilidades mais interessantes. Note-se, porém, que, embora a Geometria Euclideana seja a mais simples na forma há certas teorias da Física Moderna que são simplificadas quando se faz uso da Geometria Riemanniana.

Segundo Alex Rosemberg (1989, p. 543), os Vectores e as Matrizes foram inventados para ajudar o estudo da Geometria n-dimensional que é grandemente simplificada pela utilização dos métodos vectoriais. Para Robinson (1989, p. 698), Félix Klein (1849-1925) liga a classificação das Geometrias à teoria dos Grupos.

Parece ser pertinente afirmar que a Geometria tem sido o refúgio para inspiração quando os caminhos da Matemática se tornam difíceis. As abstracções que fazem crescer a Matemática como um todo têm geralmente sido "agarradas" pela Geometria, justificando, talvez, o porquê do seu estudo se vir mantendo há cerca de 2500 anos.

A Geometria, vista e explorada numa relação com a experiência espacial, é uma das melhores oportunidades para se aprender como é a realidade matemática: a Geometria é um bom veículo para se fazer descobertas (estas <u>vêem-se</u>, <u>constatam-se</u>). Segundo Freudenthal (1973), a omnipresença da linguagem geométrica na Matemática de hoje não se deve apenas à tradição histórica, mas também ao facto da linguagem estar ligada aos conceitos. A terminologia usada na Álgebra e na Análise mostra que toda a Matemática está penetrada pela intuição geométrica. Mesmo nos domínios que aparentemente nada têm a ver com a Geometria é a intuição geométrica que nos sugere o que é importante, interessante e acessível, premunindo-nos contra o desvio no emaranhado imenso dos problemas, das ideias e dos métodos.

Ainda segundo Freudenthal (1973), a intuição geométrica não se reduz à visão geométrica do espaço físico. A interacção do formalismo com as intuições primárias "ingénuas", baseadas na nossa experiência espacial, conduzem às chamadas intuições refinadas ou prolongadas. As fronteiras entre o que se considera, em Matemática, como intuitivo ou não intuitivo são difíceis de distinguir. Poder-se-á dizer que, quando um matemático está a trabalhar com a intervenção de imagens e de esquemas recordando estruturas espaciais, é a intuição geométrica que está em acção -- as imagens acompanham a criação matemática.

O bom ensino da Geometria deverá conduzir os alunos à compreensão de uma certa organização, do sentido de certos conceitos e das vantagens de certas definições em relação a outras. Há, pois, que criar situações favoráveis à experimentação com objectos geométricos pelos próprios alunos, de modo a que haja uma aquisição gradual de um raciocínio que no fundo se debruça sobre objectos e situações próximas do quotidiano, evitando, deste modo, as deduções operadas num sistema formal estranho aos alunos.

> "Uma forma de conseguir que o aluno obtenha uma compreensão local é conseguir que ele disponha previamente de um largo leque de conhecimentos dispersos, desorganizados mas ligas, no entanto, por múltiplas relações que o aluno conhece (pois foi ele que as estabeleceu), muitas vezes por um processo intuitivo, mas outras por um processo de pré-demonstração. Só quando posto perante a necessidade de organizar, de sistematizar, de ordenar esse conhecimento disperso, poderá o aluno começar a compreender (pelo menos localmente) a importância do método axiomático-dedutivo" (Matos, Almeida e Teixeira, 1982, p. 141).

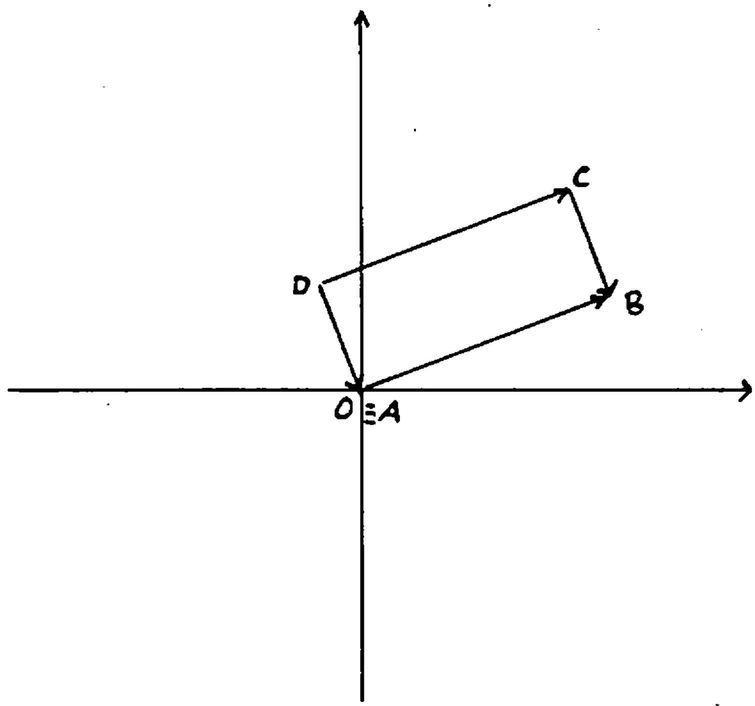
O ensino tradicional da Geometria é diferente: o assunto principal é "oferecido" aos alunos como uma estrutura pré-organizada, em vez de lhes ser dada a oportunidade de organizar as suas experiências espaciais. Todos os conceitos, definições e deduções, são pré-concebidos pelo professor, que domina todos os detalhes - ou através do livro de texto onde se constrói, com cuidado, todos os segredos da estrutura.

Como pensar a Geometria no 10º ano de escolaridade? Como relacioná-la com o simbolismo algébrico que, com o uso das letras no papel de variáveis, abre imensas possibilidades? E como relacioná-la com os Vectores?

Segundo Monteiro (1982), o estudo do Cálculo Vectorial esteve ligado à busca de uma possível representação geométrica dos números complexos, por volta do ano 1800, onde os vectores aparecem como linhas dirigidas.

Muitas vezes, em Geometria, estamos interessados em saber se dois segmentos de recta são geometricamente iguais e paralelos. Com recurso aos vectores poderemos provar que tal se passa. Como exemplo da utilização da Geometria Vectorial, iremos demonstrar o Teorema que nos diz que "Se [ABCD] é um quadrilátero no qual [AB] é geometricamente igual e paralelo a [DC], então [AD] e [BC] são também geometricamente iguais e paralelos" (ver figura 1). Escolhendo o referencial indicado, em que $O \equiv A$ e sabendo que [AB] e [DC] são geometricamente iguais e paralelos tem-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ vindo, então, $B-A = C-D$ ou ainda $B-C = A-D$ e, portanto, virá $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$, podendo-se concluir que [AD] e [DA] são geometricamente iguais e paralelos como queríamos demonstrar.

FIGURA 1



Legenda 1: [ABCD] é um quadrilátero. Se [AB] e [CD] forem paralelos e geometricamente iguais então [AD] e [DC] também o são.

A passagem, ao longo destes dois últimos séculos, aos Espaços Vectoriais de dimensão n, à Teoria das Matrizes, à definição, de modo axiomático, dos Espaços Vectoriais de dimensão finita ou não, à noção de Aplicação Linear, à Álgebra Multilinear e ao Cálculo Tensorial, levou a que, nas escolas secundárias, se tenha passado a leccionar o Cálculo Vectorial.

Como exemplo da utilização do método cartesiano vamos demonstrar o Teorema que nos diz que "Um ângulo inscrito numa semi-circunferência é um ângulo recto". A circunferência de centro em O (ver figura 2) e raio r tem por equação $x^2 + y^2 = r^2$. Ela intersecta o eixo dos xx nos pontos B(-r,0) e A(r,0), que são os pontos extremos de um diâmetro da circunferência. Seja P(x,y) um ponto qualquer da semi-circunferência (ver figura 2). Para mostrar que $B\hat{P}A$ é um ângulo recto basta provar que $d^2 = d1^2 + d2^2$ (teorema de Pitágoras). Pela fórmula das distâncias vem $d1^2 = (x + r)^2 + y^2$ e $d2^2 = (x - r)^2 + y^2$ e $d^2 = (r + r)^2 = 4r^2$. Então $d1^2 + d2^2 = \ldots = 2(2r^2) = 4r^2 = d^2$ como queríamos demonstrar.

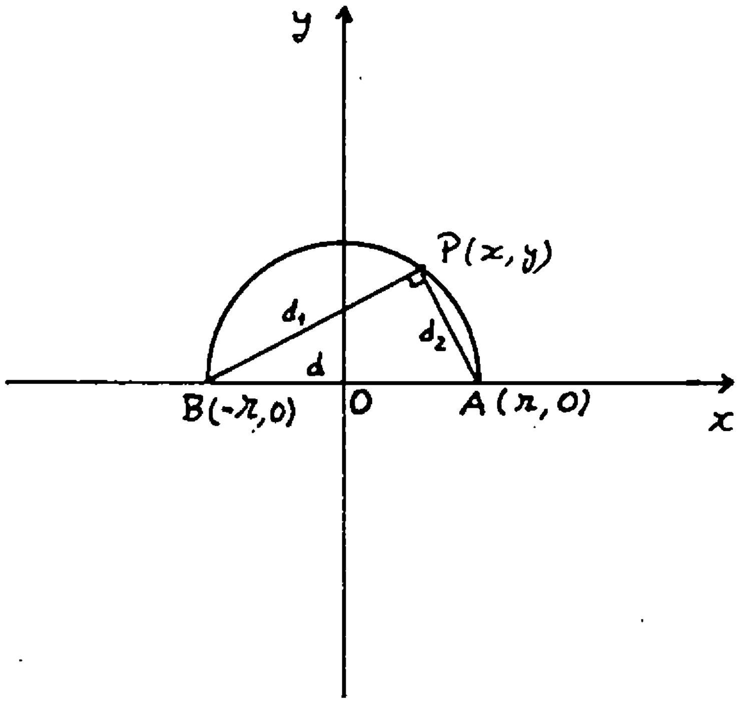
Quer na Geometria Analítica quer na Geometria Vectorial há uma relação estreita com a Geometria Euclideana.

Por exemplo, não é difícil provar, à custa desta, que são válidas, para quaisquer $a,b \in V$, e para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (em que V é o conjunto dos segmentos orientados com origem num certo ponto O fixo no espaço, e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais), as seguintes igualdades:

$$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b\,, \qquad (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a\,,$$

$$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)\,, \qquad 1\,a = a\,.$$

FIGURA 2



Legenda 2: Um ângulo inscrito numa semi-circunferência é um ângulo recto.

É, pois, fundamental que a interpretação geométrica acompanhe sempre o estudo destas novas áreas da Matemática, por parte dos alunos, de modo que estes desenvolvam a sua intuição geométrica, aumentem a sua capacidade de fazer descobertas e conjecturas, e sejam capazes de organizar os seus conhecimentos a um nível local para que os possam vir organizar mais tarde a um nível global, passando, assim, "de facto" para níveis superiores.

As Potencialidades Educativas dos Computadores

A escola tem de ter a coragem (porque é urgente) de olhar para fora de si própria, de olhar para o mundo que a rodeia, de ver que estamos numa era nova, numa era em que a informação de todo o tipo brota dos muitos meios de comunicação social existentes, duma forma desordenada e muitas vezes convidando à acriticidade e à passividade. Nashbitt (1987) afirma que se as pessoas não forem devidamente preparadas, à explosão da informação pode muito bem corresponder uma correlativa explosão da ignorância. A escola deve, pois, passar a ter um papel fundamental no tratamento de toda esta informação no sentido da organização do conhecimento, no desenvolvimento de hábitos de reflexão e de apreciação crítica, tal como afirma Ponte (1988), o que só será possível com o professor e os alunos a desempenharem um outro papel no processo de ensino/aprendizagem.

As novas tecnologias, nomeadamente o computador, poderão desempenhar um papel muito importante neste processo de mudança. O computador, através das suas potencialidades próprias (a velocidade de processamento, a fiabilidade, a capacidade de armazenamento e a capacidade gráfica), poderá ser um meio precioso para facilitar que seja cada vez mais o aluno a construir o seu próprio conhecimento. Pode mesmo estar na base da organização de actividades que enquadrem os alunos num ambiente que permita articular os aspectos intuitivos e experimentais da Matemática com os seus aspectos mais organizativos e estruturais.

"Software" Educativo para a Geometria

A linguagem LOGO com a sua Geometria da Tartaruga constitui um "veículo atraente para o desenvolvimento informal de projectos na sala de aula com intenção de alargar as capacidades de raciocínio geral dos alunos" (Fey, 1988, p. 9). Uma outra tendência dentro da investigação com o LOGO surgiu com base na aplicação das características desta linguagem no ensino de conceitos e capacidades de raciocínio (Campbell, 1987; Noss, 1987; Clements, 1987, citados por Fey, 1988, p. 9). Extensões da Geometria da Tartaruga para três dimensões foram desenvolvidas por vários investigadores, esperançados de que essa exploração provocasse bons efeitos na capacidade dos alunos para interpretar e construir representações planas de objectos e movimentos no espaço (César, 1991).

A série GEOMETRIC SUPPOSER (Yerushalmy e Houde, 1986; Schwartz, 1987) ajuda os alunos a estabelecer e a testar conjecturas acerca das figuras geométricas básicas simulando os diferentes desenhos e medições que um matemático faria ao longo de uma pesquisa de modelos. Com estes programas o aluno pode pedir ao computador, por exemplo, que desenhe figuras geométricas, que meça o comprimento da medida de segmentos de recta e que os relacione. O utilizador pode pedir sempre ao computador uma repetição das sequências feitas para outros casos quaisquer.

Em França, o projecto Cabri produziu o CABRI-GEOMETRE que permite a construção, a transformação e a manipulação exploratória das figuras encontradas na Geometria do ensino secundário. A ideia central deste programa é a de que o utilizador pode sempre ser capaz de modificar as características de qualquer elemento duma figura e de ver a nova figura desenhada imediatamente. Isto permite o exame de muitas variantes dum tema particular com o objectivo de descobrir as propriedades invariantes de todas elas (Laborde e Laborde, 1991).

A grande vantagem de se trabalhar com estes programas relativamente ao trabalho com o lápis e o papel está na rapidez e no consequente ganho de tempo do aluno. Com este processo o aluno gasta quase o tempo da aula a planear e a reflectir nos resultados de alguma construção. Numa aula sem o computador o tempo perde-se quase todo na construção das figuras.

O Programa Educacional LOGO.GEOMETRIA

O LOGO.GEOMETRIA foi construído por Eduardo Veloso (1987). Trata-se de um programa educacional que tem por base a linguagem LOGO (IBM LOGO 1983) sobre a qual foram construídos alguns módulos (ficheiros) de modo a permitir explorar a Geometria Elementar através do computador. Estes módulos estão assim organizados:

- GEOMBASE
  - GEOMVECT
    - GEOMCIRC
    - GEOMTRAN
  - GEOMANG
  - GEOMTRI
    - GEOMPOLI
  - GEOMUTIL

Houve, por parte do autor, uma grande preocupação em construir ficheiros independentes mas interligados. Ao chamarmos o LOGO.GEOMETRIA o computador carrega o módulo GEOMBASE. Com este módulo já podemos construir muitos objectos geométricos como pontos, rectas, segmentos de recta,.... Se precisarmos de construir uma circunferência teremos de chamar o módulo GEOMCIRC que, por sua vez, precisa do módulo GEOMVECT. Com este processo o autor pretendeu ganhar espaço de memória e velocidade de execução.

Os módulos construídos contêm procedimentos em linguagem LOGO que permitem construir objectos geométricos e cuja interacção com o utilizador é feita em português. Por exemplo, FAZ.R "u [A B] constrói uma recta de nome u e que passa pelos pontos A e B previamente construídos. Se por acaso já existir um objecto com o nome u o LOGO.GEOMETRIA dará a seguinte mensagem <u>em português</u> "já existe um objecto com este nome, escolha um outro da lista ...". Naturalmente que as mensagens relacionadas com a linguagem Logo, propriamente dita, são feitas em inglês. Por exemplo, se escrever FAZ.R"u [A B] onde não é deixado o espaço necessário entre R e as ", o computador dará uma mensagem em inglês, pois trata-se de um erro que ultrapassa o LOGO.GEOMETRIA.

No LOGO.GEOMETRIA os procedimentos existentes são de vários tipos: os construtores principais (construção de rectas, de circunferências, de ângulos, de vectores livres, de polígonos,...), os construtores ao acaso (construção de pontos, de rectas, de vectores livres, ... ao acaso), as operações (medidas de comprimentos de segmentos, de amplitudes de ângulos; o valor das coordenadas da intersecção de duas rectas; resposta à pergunta se dois pontos são coincidentes ou não ou resposta à pergunta se um determinado ponto pertence ou não a uma dada recta, ...), as construções geométricas (construção da mediatriz de um segmento de recta, de uma recta paralela (perpendicular) a uma outra, de um vector livre definido por dois pontos, de tangentes a uma circunferência passando por um ponto, ...), as transformações geométricas (construção de uma translacção de um polígono associada a um certo vector, ...), e ainda alguns procedimentos auxiliares (apagar objectos construídos; pedir as coordenadas de um ponto, ...). Será de realçar a utilidade e a importância dos construtores ao acaso pela força que dão quando usados pelo aluno na formulação e testagem de uma conjectura. O Logo.Geometria tem evoluído desde a sua criação, existindo, já, a terceira versão. A estruturação do programa está feita de tal modo que é possível acrescentar-se mais módulos de maneira a obter-se um programa com mais possibilidades de trabalho. Aliás, foi um pouco o que se fez com a criação do ficheiro GVA (anexo 3) no âmbito deste trabalho (cuja descrição é feita no capítulo 3).

Foi intenção do autor construir uma ferramenta electrónica que substituísse o compasso, a régua, o transferidor e o esquadro dando ao utilizador um poder muito grande para lhe facilitar a exploração da Geometria Elementar. No LOGO.GEOMETRIA a iniciativa pertence ao utilizador. É este quem faz, quem constrói. O computador não ensina nada, apenas permite que se experimente, que se erre, que se corrija o que se fez e que se volte a fazer. Trata-se, portanto, de um tipo de utilização cuja filosofia se situa no pólo oposto ao do CAI - ensino assistido por computador.

A Abordagem Pedagógica de Exploração e Descoberta, os Conceitos e os Problemas

Muda a sociedade, muda a escola e mudam os seus objectivos. Avança a Psicologia num conhecimento mais profundo de como pensa o Homem, surgem novas teorias sobre como agimos e aprendemos.

Muda a prática da Matemática na investigação, as áreas de investigação, e muda o seu processo ensino/aprendizagem.

Segundo Pestalozzi (citado por Castelnuovo, 1970, 70), se um conceito está claro para uma certa pessoa, isso não significa que com palavras ela o consiga tornar claro para os outros, pois a intuição é construtiva, o que leva a que a instrução só seja verdadeira e educativa quando deriva da actividade do sujeito. "A Psicologia mais recente sustenta a ideia de que a aprendizagem é um processo construtivo" (Moreira, 1989, p. 13). Desta forma, terão de ser os alunos a construir os seus próprios conhecimentos a partir das suas experiências, relacionando-as com os seus conhecimentos anteriores. Castelonuovo (1970) afirma que o ensino da Matemática deveria partir do concreto (para que o aluno fique de posse das ideias gerais) e conduzir o aluno à abstracção. Esta autora considera quatro grandes etapas para o ensino da Matemática, numa relação muito estreita com a investigação científica:

1ª. Saber observar (analisar o concreto; fazer analogias e diferenças;...);

2ª. medir (relações; proporções;...);

3ª. descobrir leis;

4ª. separar o concreto e o abstracto.

A Matemática tem de ser sentida pelos alunos como algo que se desenvolve como resultado necessário de uma lógica de acontecimentos sujeitos a crises, saltos e fracturas. A experimentação feita pelos alunos é necessária mas não é suficiente para a formação dos conceitos matemáticos. É preciso que os alunos analisem as situações, reconheçam e identifiquem propriedades, conjecturem leis e as testem.

Pólya (1945) ironizava dizendo que o ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha. De facto, as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as "receitas matemáticas" não deixam nada disso a ninguém. Por sua vez, Veloso (1987) afirma que quase todo o ensino actual consiste em responder a perguntas que os alunos nunca fizeram.

Grandes descobertas têm resolvido grandes problemas. Todavia, qualquer problema, desde que desafie a curiosidade do aluno e puxe pelas suas capacidades criativas, pode proporcionar-lhe, pela sua resolução, uma sensação de vitória e de grande prazer pela descoberta.

O colocar o aluno perante situações problemáticas, quer internas à Matemática, quer ligadas às suas aplicações ou a problemas do dia a dia, é um desafio à sua capacidade de ultrapassar obstáculos, à sua capacidade criativa e à sua capacidade intuitiva. Se centrarmos as nossas propostas de trabalho aos alunos em situações problemáticas adequadas (para serem formuladas e/ou resolvidas) creio que deixarão de ter razão de ser tanto as ironias de Pólya como as criticas de Veloso, pois estaremos a criar nos alunos o gosto pelo trabalho intelectual.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo sintetiza teorias e resultados de estudos anteriores que influenciaram o suporte teórico e pedagógico do autor desta investigação. Compõe-se de cinco secções: a) a aprendizagem de conceitos; b) a formulação e a resolução de problemas; c) provas e demonstrações; d) atitudes e concepções; e) o computador na Matemática e no seu ensino/aprendizagem.

Aprendizagem de Conceitos

A comunidade dos professores e educadores matemáticos está de acordo quanto à importância da aprendizagem de conceitos. Uma boa argumentação sintetizadora de tal sentir pode ler-se nos Standards (NCTM, 1989, p. 146),

> "Os conceitos são a essência do conhecimento matemático... Os alunos só podem encontrar significado na Matemática se tiverem uma compreensão dos seus conceitos e dos vários significados ou interpretações... A compreensão conceptual é fundamental para o conhecimento matemático".

Segundo Balacheff (1988), a história testemunha que a diferenciação e a generalização dos conceitos matemáticos nunca estão terminados. Por exemplo, o conceito de número, elementar e fundamental, não deixou de se transformar. Esta transformação começa nos números inteiros e positivos e termina nos recentemente inventados números reais não standards. Estas evoluções obrigam à necessidade de se retomar as provas, de se reconsiderar o seu domínio de validade e de precisar os objectos sobre os quais elas caiem.

Mas quanto à definição de conceito há uma grande variação de opiniões. Flavell (citado por Sowder, 1980, p. 244) sumarizou a sua pesquisa sobre as diferentes definições escrevendo "a sua maior semelhança está na sua insuficiência". Sowder (1980, p. 246) trancreve duas dessas definições, apresentando-as, todavia, sem pretensões de valorizar a sua superioridade, quer em relação às outras quer, mesmo, uma em relação à outra. Diz uma delas:

> "Um conceito consiste num conjunto de objectos, de símbolos ou acontecimentos que foram agrupados em conjunto porque repartem algumas características comuns (atributos). Os conceitos são normalmente referenciados por algum nome" (Merril & Wood, 1947).

Diz a outra:

> "...Definimos um conceito como informação ordenada acerca das propriedades de uma ou mais coisas -- objectos, acontecimentos ou processos -- que capacita cada coisa particular ou classe de coisas a ser diferenciada de coisa ou classe de coisas e também a ser relacionada com outra coisa ou classe de coisas" (Klausmeier et al., 1974).

Porém, para os professores e educadores de Matemática, mais importante do que a definição de conceito será o como se pode decidir se um conceito foi aprendido pelos alunos.

A Evidência da Aprendizagem de um Conceito

Erlwanger (1973) mostrou que mestria em conteúdos e destrezas de cálculo não implicava compreensão. Também para Lesh (1985, p. 9), "o facto de se 'meter' na cabeça de um aluno um conceito não é garantia de que ele seja capaz de o utilizar". Por outro lado, a ideia de que a compreensão de um conceito matemático envolve mais do que uma mera recordação da sua definição e do seu reconhecimento através de exemplos é defendida nos Standards (1989, p. 146), e reforçada com a seguinte afirmação:

> "A compreensão de um conceito envolve o saber das suas propriedades e do saber como ele se relaciona com outros conceitos matemáticos, bem como, saber as várias interpretações e significados que ele toma em contextos diferentes".

Papert (1980) afirma que nenhum conhecimento é inteiramente redutível a palavras e nenhum é totalmente indescritível (p. 96).

Um conceito terá de ser encarado sob vários aspectos dos quais se destacam a definição, a compreensão e a sua utilização.

Klausemeier, Ghatala e Frayer (citados por Sowder, 1980, p. 245) avançaram com um modelo de desenvolvimento e aprendizagem conceptual a partir do qual a aprendizagem de um conceito é evidenciada em cada um dos seus quatro níveis:

NIVEL 1 (Concreto): O aluno reconhece um exemplo que experimentou antes (por exemplo, o aluno diz "trapezóide" quando lhe é mostrado um trapezóide visto anteriormente).

NIVEL 2 (Identificar): Em aditamento ao nível anterior, o aluno reconhece um exemplo encontrado antes, mesmo que este seja observado numa perspectiva espaço-temporal diferente (por exemplo, o aluno ainda chama trapezóide à figura mesmo se ela se encontrar "de lado" em relação a uma situação anterior).

NIVEL 3 (Classificar). Em aditamento aos dois níveis anteriores, o aluno pode distinguir entre exemplos e não exemplos (o aluno tira todos os trapezóides de uma colecção de várias figuras diferentes).

NIVEL 4 (Formal). Em aditamento aos niveis anteriores, o aluno pode enunciar uma definição do conceito.

Segundo este modelo torna-se obrigatório que haja uma nomeação verbal no nivel 4, não impedindo, porém, que ela possa existir num outro nivel qualquer. O nivel 4 inclui mais do que uma definição, evidenciando uma compreensão que vai para além do hábito da recitação de uma definição adquirida. Este modelo reforça, ainda, a ideia de que uma definição de um conceito não é o conceito, embora aquela possa desempenhar um papel importante no seu ensino.

Segundo Sowder (1980, p. 246), este modelo não é o mais indicado para esclarecer a situação em que o aluno produz exemplos. Assim, ele propôs um nivel intermédio entre os niveis três e quatro, que designou por NIVEL 3,5 (Produção), em aditamento aos três anteriores. Neste nivel 3,5 o aluno pode dar um novo e um qualquer exemplo do conceito.

Não há, pois, que ter pressas em pedir uma definição do conceito, ainda que pareça que este já está claro para o aluno. Há que permitir que o aluno reconheça, identifique e classifique. Por outro lado, é de fundamental importância ter em conta o que o aluno já sabe do conceito pois,

> "o que uma pessoa pode aprender depende dos modelos que tem disponiveis na mente. As leis de aprendizagem estão relacionadas com a forma como as estruturas intelectuais se desenvolvem a partir de outras e no como, nesse processo, adquirem as formas lógica e emocional" (Papert, 1980, p. VII).

A Taxonomia dos Conceitos

Henderson (citado por Sowder, 1980, p. 246) fez uma discussão taxonómica dos conceitos. Um dos pares de sub categorias que ele considerou foi o do concreto versus abstracto. Para ele os conceitos concretos são aqueles com exemplos fisicamente reais: livro de Álgebra, compasso, etc. Os conceitos abstractos são aqueles de que não temos tais exemplos. A maior parte dos conceitos encontrados em Matemática são abstractos: número fraccionário, infinito, recta, polígono, etc. Porém, os números e as figuras geométricas, por exemplo, admitem representações fisicamente reais: um conjunto de objectos, desenhos, etc, que lhes dão uma característica do que é concreto. Desde que existam essas representações concretas dos conceitos abstractos, uma dicotomia mais útil poderá ser baseada na familiaridade. Assim, o número 3/4 poderá ser abstracto e não familiar para um aluno do ensino primário mas bastante familiar embora igualmente abstracto para um aluno do ensino secundário.

Intuição

A palavra intuição, tal como é usada pelos matemáticos, traz consigo uma carga pesada de mistério e ambiguidade (Davis & Hersh, 1980, p. 391). Para estes autores, a intuição algumas vezes parece ser um substituto perigoso e ilegítimo da prova rigorosa; outras vezes, parece indicar uma iluminação inexplicável de penetração de espírito ("insight") pela qual o feliz conhecimento matemático ganho por ela só é adquirido por outros após longos esforços. Ainda segundo Davis e Hersh (1980), a intuição não é uma percepção directa de algo que está sempre presente no exterior. Ela é o efeito na mente de certas experiências da actividade e manipulação de objectos concretos (num estádio posterior de notas no papel ou mesmo de imagens mentais). Nós temos intuição porque temos representações mentais de objectos matemáticos. Estas representações são adquiridas não através da memorização de fórmulas verbais, mas por experiências repetidas (ao nível mais elementar a experiência com a manipulação de objectos físicos e num nível mais elevado experiência de resolução de problemas e de descoberta de coisas por e para nós próprios).

Para Fischbein (1982) a nossa inteligência trabalha pela inter-relação de dois modos de operação: o intuitivo e o lógico-analítico. O primeiro é uma forma de conhecimento global e compacto com um única qualidade de auto evidência que resulta a partir da nossa apreensão da estrutura de uma dada situação, processando-se parcialmente ao nível do consciente e parcialmente ao nível do inconsciente. O segundo tem como principal característica a clareza, processando-se ao nível do consciente e utilizando meios simbólicos refinados e que pode ser facilmente comunicado. Ainda segundo este autor, a intuição desempenha um papel diferente, essencial e insubstituível na cognição e no pensamento produtivo.

Para Ponte (1984, p. 18) apoiamo-nos na intuição quando resolvemos muitas das tarefas que a vida nos apresenta em cada momento e é, também, com base na intuição que muitos matemáticos fazem muito do seu trabalho criativo (Hadamard, 1945; Lucas, 1981; Poincaré, 1913; Thom, 1973; Wilder, 1967).

Fischbein (1982) escreve, ainda, o seguinte sobre este tema:

> "A intuição sendo uma forma derivada do conhecimento, tal como o pensamento analítico, é capaz de organizar a informação, sintetizar experiências adquiridas previamente, seleccionar atitudes eficientes, generalizar reacções verificadas, conjecturar, por extrapolação, por detrás dos factos que estão à vista, à mão. A maior parte do processo todo é inconsciente e o produto é uma forma cristalizada de conhecimento que, tal com a percepção, aparece como sendo auto evidente, internamente estruturada e pronta para guiar a acção" (p. 12).

O intuitivo e o lógico-dedutivo desempenham, assim, um papel complementar.

A importância do pensamento intuitivo tem sido tratado na literatura psicológica (Ponte, 1984, p. 20). Segundo este autor, Brunner (1960) afirmou a superioridade do pensamento intuitivo sobre o formal e indicou o seu papel nos esforços criativos e Piaget (1973) atribuiu um carácter operacional à intuição matemática e indicou que na aprendizagem o processo intuitivo precederia a axiomatização. Ainda segundo Ponte (1984, p. 20), muitos matemáticos interessados nos problemas do ensino (Dieudonné, 1973; Feller, 1957; Polya, 1981; Silva, 1964; Wilder, 1967) têm argumentado que o desenvolvimento e a educação da intuição seria um importante objectivo do ensino da Matemática.

Formulação e Resolução de Problemas

Para Ponte (1991, p. 1) um problema consiste numa tarefa para a qual o aluno não encontra um método imediato de resolução, mas em cuja solução se empenha activamente. Ainda segundo este autor, um problema distingue-se de um simples exercício na medida em que este exige apenas a aplicação de um método de resolução já bem conhecido. Um problema, para Pehkonen (1991, p. 1), é uma situ-ação onde uma pessoa é chamada a relacionar, de maneira diferente, alguma informação conhecida de modo a realizar uma dada tarefa. Se se podem reconhecer imediatamente as acções requeridas para executar a tarefa, então diz-se que estamos perante um exercício ("routine task"). Este autor afirma haver diferentes classificações de problemas. Para ele a mais importante é a que classifica os problemas de fechados e abertos (situação problemática ou investigação ou exploração). No primeiro caso existe, de forma mais ou menos explícita, uma indicação do que é dado e do que é pedido. No segundo caso isto não se passa, tendo o próprio aluno que desempenhar um papel relevante na sua definição.

<u>A Resolução de Problemas no Ensino da Matemática</u>.

Nos anos quarenta o educador William Brownell (Lester, 1980, p. 42) deu atenção, em termos de investigação e de sugestões didácticas, à Resolução de Problemas. Porém, foi com Georges Pólya e com a publicação do seu livro <u>How To Solve It?</u>, em 1945, que a Resolução de Problemas começou a ser encarada de uma forma importante para o ensino da Matemática. Esta época, a dos anos quarenta e cinquenta, era caracterizada pelo

> "curriculo da disciplina de Matemática ser relativamente estável e aborrecido, onde a maioria dos alunos memorizava procedimentos e factos matemáticos e se envolvia pouco na compreensão de conceitos e em destrezas de aplicação" (Schoenfeld, 1991, p. 5).

Os anos sessenta foram uma década marcada pela abstracção na educação matemática, a chamada "matemática moderna", havendo uma atenção bastante grande nos conceitos e estruturas com a intenção de se ensinar o mais cedo possível as matérias mais abstractas e mais avançadas.

> "O papel privilegiado atribuído às estruturas mais pobres, nomeadamente de natureza algébrica, não favoreceu o desenvolvimento de actividades relacionadas com os processos mais complexos de pensamento como a Resolução de Problemas" (Ponte, 1991, p. 2).

No fim dos anos sessenta a percepção geral foi a de que os alunos não haviam aprendido as abstracções e o seu domínio das destrezas básicas tinha declinado. O resultado desta situação fez surgir a corrente do "back to basics" baseada nos algoritmos básicos de papel e lápis. Porém, no fim da década de setenta os

> "alunos eram incapazes de pensar matematicamente e de resolver problemas sendo além disso piores nas competências básicas ("basic skills") do que os alunos que tinham sido ensinados com base nas matemáticas modernas" (Schoenfeld, 1991, p. 5).

Em 1980, a Associação de Professores de Matemática dos EUA (NCTM) defendeu que a "Resolução de Problemas deveria ser o foco da Matemática escolar" (p. 2), devendo-se organizar o currículo da disciplina em torno da Resolução de Problemas, dando bastante relevo às aplicações da Matemática. O relatório Cockcroft (1982) defende a Resolução de Problemas, dando relevo à aplicação da Matemática a situações da vida real. Em 1984, a Resolução de Problemas foi um dos temas mais importantes do ICME-5 (International Congress on Mathematical Education).

Em 1988, a Associação de Professores de Matemática de Portugal (APM) defende a Resolução de Problemas como

> "uma linha de força que, atravessando todo o currículo deverá orientar a definição dos seus objectivos, a proposta de metodologias, a selecção dos conteúdos e processos de avaliação" (p. 32).

Segundo Ponte (1991, p. 3) existem, ao nível nacional e internacional, pelo menos três perspectivas diferentes sobre a forma de encarar a actividade de Resolução de Problemas ao nível dos currículos e ao nível da prática pedagógica dos professores.

Uma delas é a do ensino "enriquecido" com problemas. Estes exigem conhecimentos de base, conceitos e técnicas cuja aprendizagem não deve ser descurada. A Resolução de Problemas é, assim, uma actividade importante que se deve articular com outros conteúdos e actividades constitutivas do currículo de Matemática que deverá continuar a estar organizado por temas de trabalho bem definidos. Para este autor é esta a perspectiva apresentada pelo NCTM (1980) na sua Agenda para Acção.

Uma segunda perspectiva é a que defende a necessidade de partir de problemas de modo que o conhecimento matemático surja deles e da experiência com a sua resolução. Esta perspectiva encara a possibilidade de organizar o processo de ensino/aprendizagem em grandes temas de trabalho levando à "diminuição" de matéria explicitamente prescrita", onde haja mais variabilidade e flexibilidade curriculares.

Uma terceira perspectiva é aquela que para além de propor aos alunos problemas para resolver, pretende ensiná-los, de forma explícita, a resolvê-los, quer através de heurísticas (gerais ou específicas), quer através de técnicas concretas ou desenvolvendo nos alunos capacidades metacognitivas. É particularmente esta última perspectiva que será objecto de atenção na secção seguinte.

O Ensino da Resolução de Problemas

Várias são as abordagens propostas para o ensino da Resolução de Problemas. Uma das mais conhecidas é a do ensino de Heurísticas Gerais, ou seja, do ensino de estratégias que em princípio se poderão aplicar à resolução de muitos problemas. A consideração de tais estratégias poderá ajudar na resolução de um problema. Pólya (1945) propôs um modelo que se baseava na consideração de quatro fases:

1ª- Compreender o problema (perceber claramente o que é necessário para a sua resolução; quais são os dados? qual é a incógnita?).

2ª- Delinear um plano (como é que os diversos items estão relacionados; como é que a incógnita está ligada aos dados; tentar encontrar problemas parecidos com o proposto).

3ª- Executar o plano.

4ª- Reanalisar a resolução feita (é possível chegar ao resultado por caminhos diferentes? é possível utilizar o resultado, ou o método, noutro problema?).

Segundo Ponte (1991, p. 6) as Heurísticas podem ser ou mais gerais ou mais específicas, como por exemplo, o desenhar um diagrama, a procura de regularidades, o estabelecimento de objectivos intermédios, o trabalhar do fim para o princípio, o usar a tentativa e o erro, o provar por contradição ou o reduzir o número de variáveis. Esta variedade de heurísticas acaba, muitas vezes, por constituir uma dificuldade para os alunos, nomeadamente quanto à sua escolha e muito particularmente quanto à sua aplicação em cada problema concreto.

Lester (1980, p. 40) considera uma outra abordagem, a do Desenvolvimento de Capacidades Instrumentais Especificas, correspondentes a técnicas que devem ser dominadas para que uma dada estratégia geral possa ser usada. Por exemplo, um professor pode mostrar como é que a construção de uma tabela pode ajudar a resolver um dado problema, indicando como é que a tabela permite organizar e manter o controlo da informação. Mais tarde, os alunos praticam a leitura e a construção de tabelas e resolvem problemas para os quais as soluções são facilitadas pela construção das tabelas.

Uma terceira perspectiva é a que consiste no desenvolvimento dos Processos Metacognitivos.

> "Os processos metacognitivos têm a ver com o pensamento acerca do pensamento. Por um lado trata-se do conhecimento dos conhecimentos, dizendo respeito ao que a pessoa sabe acerca das suas próprias capacidades e recursos, assim como das suas concepções sobre a Matemática. Por outro lado, trata-se da gestão ou controlo dos conhecimentos respeitantes à forma como se tomam decisões para seleccionar e gerir estratégias e acções práticas com vista à resolução de um problema" (Fernandes, 1989, p. 3).

Para os defensores desta abordagem, os aspectos metacognitivos são importantes e devem ser utilizados e ensinados abertamente na sala de aula para que, entre outras coisas, se possa contribuir para que os alunos:

1. Melhorem a qualidade das decisões que tomam quando estão a resolver problemas.

2. Tomem consciência das estratégias, técnicas, conceitos e processos matemáticos que ajudem a resolvê-los.

3. Desenvolvam capacidades que lhes permitam uma utilização eficaz de tais conhecimentos e estratégias.

Para Lester (1980) uma outra forma de ensinar os alunos a resolver problemas consiste na Demonstração pelo professor dos passos relevantes, da escolha de uma estratégia, etc, através de exemplos de problemas seleccionados. Espera-se, em seguida, que os alunos usem aqueles processos para resolverem problemas.

Finalmente, uma quinta abordagem, referida igualmente por Lester (1980), dá grande importância à Prática de Resolução de Problemas por parte dos alunos. Os problemas propostos poderão ter mais do que uma resposta ou, mesmo, não ter solução, podendo alguns ser resolvidos por mais de um processo. Alguns dos problemas podem de algum modo estar relacionados com outros, constituindo, por exemplo, suas extensões.

Lester (1980, p. 44) considera não existir evidência que indique superioridade de um método sobre qualquer outro e recomenda que se use uma combinação de todos eles. Porém, outros autores (por exemplo Schoenfeld, 1991; Stacey, 1991; e Mason 1991), afirmam que não se deve ensinar explicitamente as heurísticas mas sim ensiná-las implicitamente através da prática dos alunos na Resolução de Problemas. Estes autores dão grande relevo ao papel do contexto do ensino/aprendizagem, ao papel do professor e ao envolvimento dos alunos.

> "A modificação, mais do que o abandono, de uma ideia é uma estratégia importante da Resolução de Problemas. É registando e reflectindo sobre as experiências que os alunos vão tendo que estes melhor aprendem as heurísticas" (Stacey, 1991, p. 11).

A Resolução de Problemas como um Aspecto do Pensar Matemático

Para Schoenfeld (1991, p. 5) a Resolução de Problemas é uma actividade que não se pode limitar à simples resolução de um problema dado pelo professor ao aluno. Este tem de ser ajudado a aprender a pensar matematicamente, quer vendo o mundo sob o ponto de vista matemático (modelando, simbolizando, abstraindo e aplicando ideias matemáticas numa vasta área de situações), quer obtendo os instrumentos necessários para matematizar com sucesso. Schoenfeld defende cursos de resolução de problemas com realce nos aspectos estéticos ("problem aesthetic") onde, para além de proporcionarem discussões matemáticas, proporcionem autênticos microcosmos onde os alunos se sintam membros de uma comunidade matemática que está a fazer Matemática.

Halmos (citado por Stacey, 1991, p. 9) afirma que os problemas são o coração da Matemática. A Resolução de Problemas terá de reflectir o interesse e a utilidade da Matemática. Terá de ser igualmente uma actividade onde o aluno encontre uma certa infamiliaridade, um certo desafio. Na sala de aula, as actividades de Resolução de Problemas terão de ser caracterizadas por uma liberdade para os alunos seguirem os seus próprios caminhos, para encontrarem uma solução. Estas caracteristicas terão de se sobrepor ao seguir de um conjunto de rotinas ou procedimentos indicados pelo professor. Para Stacey (1991, p. 9) os objectivos principais da Resolução de Problemas são o de encorajar o aprofundamento da compreensão das ideias matemáticas, para alimentar atitudes que tornem os alunos mais poderosos na utilização da Matemática, construindo os seus conhecimentos, hábitos e estratégias que os ajudem a empregar o seu pensamento matemático onde ele possa ser útil. A Resolução de Problemas pode levar o aluno a ver as razões pelas quais as ideias matemáticas são importantes. Os alunos precisam de oportunidades regulares de envolvimento com problemas onde as técnicas matemáticas apropriadas não sejam "engatilhadas" por um contexto padronizado em capítulos orientados ou demasiado guiados pelo professor. Esta autora defende, ainda, que para desenvolver a capacidade de resolver problemas é preciso desenvolver atitudes de flexibilidade, de reflexão e de auto-confiança. Para Stacey é de grande importância a discussão frequente de abordagens e alternativas num ambiente de sala de aula com um bom trabalho de grupo, apoiado e desafiador, de ajuda mas não de dar respostas.

O peso dado ao ambiente de trabalho na Resolução de Problemas é, também, realçado por outros autores, nomeadamente por Mason (1991, p. 16), onde afirma que as perguntas e problemas matemáticos não são interessantes ou desinteressantes, não estimulam ou desestimulam por si. Essas qualidades nascem na presença de quem se propõe enfrentá-los. As condições que suportam tais estados têm muito a ver com a atitude e o ambiente criados pelo professor, pois as pessoas pensam sempre inseridas num determinado contexto. A força da Resolução de Problemas vem a partir do momento em que cada pessoa coloca o seu próprio problema resultando deste facto um seu envolvimento. Esta perspectiva é claramente defendida por Stacey (1991), ao afirmar que não é a tarefa ou a questão proposta que define estar-se perante um problema, mas sim pela maneira como ela é utilizada na sala de aula. Para

Mason (1991), um dos objectivos do ensino deveria ser o de estimular os alunos a fazerem perguntas e a formularem problemas, pois um problema nunca o será para uma certa pessoa enquanto ele não se tornar seu. Aliás, formular problemas é tão importante como resolver problemas, donde a experiência de descobrir e criar os seus próprios problemas matemáticos deveria fazer parte da educação de todos os alunos (Kilpatrick, citado por Moreira, 1989, p. 65). Ainda segundo este autor, a Resolução de Problemas e a Formulação de Problemas estão muito associados pois na resolução de um problema há uma formulação quando se pretende interpretar e resolver a situação. A Formulação de Problemas pode ocorrer durante a elaboração do plano de abordagem, nomeadamente quando o problema é decomposto em sub problemas de mais fácil abordagem. Mesmo após a resolução de um problema, há oportunidade para formular novos problemas, ora questionando-se como é que as modificações das condições iniciais podem afectar a sua solução, ora através de suas extensões. Esta perspectiva é, também, defendida por Schoenfeld (1991), para quem

> "uma das características dos problemas deveria ser o de semente para novas explorações matemáticas, para envolver os alunos a fazer Matemática, para os levar a elaborar extensões e generalizações - um bom problema conduz a mais problemas" (p. 7).

Provas e Demonstrações

A Demonstração na Matemática

Para Sebastião e Silva (1953), o conceito de axiomática tem evoluído ao longo dos séculos. O conceito clássico de axiomática pressupunha a existência de um sistema de termos e de proposições baseadas nesses termos. Estes, chamados primitivas, não podiam ser definidos logicamente e correspondiam a dados da intuição. Aquelas, chamadas postulados ou axiomas, segundo o ponto de vista moderno, não se demonstravam logicamente e eram provenientes da intuição e a sua veracidade vinha do seu carácter de evidência, e das quais se deduziam todas as outras proposições do sistema: os teoremas. Ainda segundo este matemático, no conceito moderno

> "os termos primitivos já não designam seres bem determinados, dos quais 'temos um conhecimento intuitivo imediato'; agora os termos primitivos são simplesmente indeterminadas, semelhantes às incógnitas ou variáveis de um sistema de equações. Os axiomas estão bem longe de ser aquelas 'verdades de tal modo intuitivas, de tal modo elementares, que se nos tornam evidentes': agora são apenas condições, verificadas por certas estruturas, não verificadas por outras. Por sua vez, os teoremas relativos à axiomática serão todas aquelas condições implicadas pelos axiomas, isto é, que resultam automaticamente verificadas desde que o sejam todos os axiomas" (p. 20-21).

Demonstrar uma proposição segundo o conceito clássico, consiste num apoio muito grande nos factos, na nossa experiência directa da vida e, em seguida, na dedução. Por exemplo, de $7^2-1=48$; $11^2-1=120$; $15^2-1=224$ em que 7, 11 e 15 são números naturais ímpares e 48, 120 e 224 são múltiplos de 8, somos levados a avançar com a hipótese de que o quadrado de um qualquer número natural e ímpar, diminuído de uma unidade, é um múltiplo de 8. Nesta hipótese fala-se de um <u>qualquer</u> número ímpar obrigando, por isso, a encontrar argumentos válidos para qualquer número ímpar. Ora, todo o número ímpar tem a forma 2n-1, com n um natural qualquer, vindo então $(2n-1)^2-1=4n(n-1)$ que é um múltiplo de 8 qualquer que seja o número natural n. Na realidade

4n(n-1) é múltiplo de 4, devido ao factor 4. Por outro lado (n-1) e n são dois números naturais consecutivos, um dos quais tem de ser par, o que leva a que a expressão 4n(n-1)=4[n(n-1)] contenha necessariamente um factor 2. Deste modo 4n(n-1) é sempre um múltiplo de 8, como queriamos demonstrar. A via de obtenção de conclusões gerais por observação de numerosos casos particulares chama-se indução. A aplicação de leis gerais conhecidas a casos particulares chama-se dedução. Assim sendo, a demonstração deve apoiar-se unicamente em proposições verdadeiras, os axiomas e os teoremas já demonstrados, com os quais se deduz a veracidade ou falsidade da proposição que nos propomos demonstrar.

Com o método moderno, também chamado formal ou abstacto, "deu-se início a uma teoria da definição e a uma teoria de demonstração" pois, "o que interessa fundamentalmente é que a axiomática seja compatível ou possível, isto é, que exista pelo menos uma sua realização" (Silva, 1953, p. 19). É o conteúdo da Matemática a ser considerado como consistindo essencialmente de relações entre objectos pois os pontos de partida do sistema da Matemática dedutiva não serão as verdades evidentes acerca dos objectos fundamentais, mas as relações postuladas entre termos indefinidos. É a Matemática como estrutura onde

> "as relações são conjuntos ou pares ordenados, as funções são tipos de relações, as estruturas algébricas são conjuntos com leis de composição (que são em si funções), topologias são certos tipos de conjuntos e subconjuntos identificados, etc" (Choquet, citado por Bell, 1976, p. 2.2).

No ensino secundário, nomeadamente no 10º ano de escolaridade, seria uma grande falta de bom senso praticar um ensino das demonstrações nesta perspectiva formalista (cem por cento dedutiva, segundo Silva (1953, p. 22)). O carácter intuitivo deve estar sempre presente sob pena de aumentar o divórcio existente entre os alunos e a Matemática. No presente estudo uma demonstração foi interpretada como uma prova matemática baseada em verdades evidentes com as quais se desenvolvem raciocínios para se deduzir a veracidade (ou falsidade) da proposição em causa.

Para Balacheff (1988), a validade de uma proposição é, em primeiro lugar, garantida ao nível do sujeito locutor, tomando raízes nos seus conhecimentos onde assenta a sua racionalidade. Esta explicação não se reduz necessariamente a uma cadeia dedutiva e o seu suporte é fundamentalmente a língua materna. Assim que uma explicação é aceite e reconhecida, convém, para a designar, dispôr de um termo que permita marcar o seu afastamento do sujeito locutor. Balacheff adopta o termo <u>prova</u>. A passagem da explicação à prova faz referência a um processo social pelo qual um discurso, assegurando a validade de uma proposição, muda de estatuto ao ser aceite por uma comunidade. O tipo de prova dominante na Matemática, a <u>demonstração</u>, ainda segundo Balacheff, tem uma forma particular, ele precisa duma sucessão de enunciados organizados segundo regras determinadas:

> "Um enunciado é conhecido como sendo verdadeiro, então é deduzido a partir dos que o precedem com ajuda duma regra de dedução tomada num conjunto de regras bem definidas. Uma demonstração caracteriza-se, deste modo, pela sua forma estritamente codificada" (p. 30).

Para este autor uma prova matemática precisará de uma boa organização, de uma boa estruturação e sobretudo de um bom nível de formalização dos conhecimentos que utiliza para que seja considerada uma demonstração (por exemplo, as provas existentes no antigo compêndio de Geometria do 2º Ciclo do Ensino Secundário, bem como, as provas existentes no compêndio de Aritmética Racional do antigo 3º Ciclo do Ensino Secundário -- construídas numa base axiomatizada com primitivas, axiomas, teoremas e corolários). Na presente investigação e como atrás foi referido não é feita esta exigência para que a prova matemática constitua uma demonstração. Os alunos fizeram uma demonstração se na prova apresentada estiverem claras as hipóteses feitas, os passos dados com as suas justificações e a conclusão da veracidade (ou falsidade) da proposição.

A componente social que acompanha a elaboração de uma demonstração é, também, claramente defendida por Manin (citado por Balacheff, 1988, p. 30), "uma demonstração (proof) torna-se uma demonstração após o acto social de ser aceite como uma demonstração".

A discussão em torno do que é e não é rigoroso na teoria e nas demonstrações matemáticas é, segundo Poincaré (citado por Lakatos, 1978, p. 75), a principal polémica na comunidade matemática. Segundo este matemático, as alterações, ao longo dos tempos, no critério de "rigor da prova" deram origem a grandes revoluções na Matemática. R. L. Wilder (citado por Lakatos, 1978, p. 48) afirmou que uma "prova é apenas um processo de teste que aplicamos a sugestões da nossa mente" e Georges Pólya (1945) observa que uma prova, mesmo que incompleta, estabelece conexões entre factos matemáticos e isso ajuda a mantê-los na memória. Lakatos (1978) afirma que a Matemática informal não cresce através do crescimento do número de teoremas estabelecidos mas sim através do constante melhoramento das conjecturas por um processo de crítica, pela lógica da prova e refutação. R. Thom (citado por Bell, 1976, p. 3.15), reforçando esta posição de Lakatos, afirma que uma demonstração deve ser olhada mais como um acto de comunicação do que como um relatório estático. Para este matemático o rigor da prova, no sentido usual, não no sentido formal, depende do facto de cada passo estar claro para cada leitor tendo em conta as extensões de significado já efectuado nas etapas anteriores. Para Thom, a rejeição, pela comunidade matemática, de uma prova é mais frequentemente devido a uma sua não compreensão do que ao facto dela ser falsa. Isto acontece, geralmente, porque o autor, cego de certo modo pela visão da sua descoberta, fez suposições excessivamente optimistas acerca das partes atrás consideradas. Um pouco mais tarde os seus colegas explicitarão aquilo que o autor expressara implicitamente e, pelo preenchimento dos "buracos" farão a prova completa. Deste modo, o rigor, no sentido da clarificação de cada passagem para o leitor, acaba sempre por acontecer, mais tarde ou mais cedo. O objecto do rigor matemático, para Hadamard (citado por Watson, 1980, p. 165), não tem outro objectivo senão sancionar e legitimar as conquistas da intuição.

"Todo o matemático sabe que uma demonstração não é verdadeiramente compreendida quando se está limitado a verificar passo a passo a correcção das deduções que lá figuram, sem tentar imaginar claramente as ideias que conduziram à construção dessa cadeia de deduções e não a outra" (Bourbaki, citado por Balacheff, 1988, p. 28). As razões, entendidas "como organização inferencial de significações" (Halbwaches, citado por Balacheff, 1988, p. 28) podem escapar a uma demonstração por muito impecável que o seja sob o ponto de vista lógico. O próprio Cantor ao interpelar Dedekind sobre a proposta de uma demonstração que este acabara de escrever afirmou "Eu estou a ver mas não sinto" (Cavailles, citado por Balacheff, 1988, p. 28). Esta perspectiva é, também, sustentada por Watson (1980), para quem a importância de uma demonstração não é apenas o convencer-nos que o teorema é verdadeiro -- para confirmar que a intuição não nos pregou uma partida -- mas para nos mostrar PORQUE é que o teorema é verdadeiro e em que condições.

Balacheff (1988) afirma que a validade de uma proposição não é definitiva, podendo evoluir no tempo com a evolução dos saberes sobre os quais ela se apoia, podendo, mesmo, ser aceite por uma comunidade mas ser recusada por outra. A aceitação por certos matemáticos, e a não aceitação por outros, da demonstração da Conjectura das Quatro Cores anunciada por Kenneth Appel e Wolfgang Haken (1976), é disso um exemplo. Aliás, a influência do computador na Matemática está a pôr em causa o próprio conceito de demonstração, pois esta pode passar a estar dependente da correcção e eficácia de um algoritmo computacional. N. Sankar (1988), após focar o papel fundamental que os verificadores de demonstrações têm para o desenvolvimento da Matemática, afirma que a investigação em verificação de demonstrações através do computador trará, eventualmente, uma luz considerável sobre a natureza da explicação e da notação matemáticas, e fornecerá fontes frutuosas de novas conjecturas e de novas técnicas.

Se o que envolve a feitura das demonstrações tem um carácter eminentemente social, onde o próprio rigor está muito ligado ao fenómeno de comunicação humana, onde não se pode perder o significado do todo na compreensão dos sucessivos passos sendo, mesmo, um fenómeno dinâmico, em evolução, como pensá-las no seu ensino/aprendizagem?

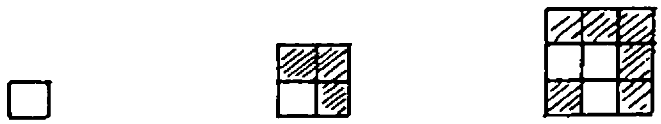
A Demonstração no Processo do Ensino/Aprendizagem

Normalmente, o professor, na sala de aula, faz a demonstração no quadro e pede, em seguida, aos alunos que façam da mesma maneira. "A aprendizagem das demonstrações faz-se pela IMITAÇAO" (Groupe Premier Cycle, Journées Nationales APMEP, 1979, citadas por Balacheff, 1988, p. 18), onde o aluno é levado a uma atitude passiva na qual ele se torna um contemplador de uma estrutura acabada. Por este processo oculta-se, aos alunos, a demonstração como um "instrumento de prova, sobrevalorizando-se a demonstração como um tipo de discurso onde é dado valor essencialmente à estrutura" (Balacheff, 1988, p. 18). Para que a demonstração tenha sentido para os alunos é necessário que estes a sintam como um fiável instrumento de eficácia para estabelecer a validade de uma proposição. Os alunos terão de sentir que a demonstração "é necessária para fundamentar a generalidade da proposição que se demonstra, isto é, a possibilidade da sua aplicação a todos os casos particulares" (Fetisov, 1980, p. 18).

A obtenção de conjecturas, por parte dos alunos, deveria ter um maior peso no ensino/aprendizagem da Matemática do que aquele que tem tido nas nossas escolas. "A conjectura poderá trazer consigo a convicção de racionalidade" (Watson, 1980, p. 164).

Claro que, depois, é necessário demonstrá-la, é necessário provar a sua veracidade, sob pena da conjectura nunca deixar de o ser. Através da experimentação para um ou vários casos pode-se avançar para um modelo, que por sua vez pode ser válido para um outro caso mas, até que ponto podemos ter a certeza que ele é válido para todos os casos? Só uma prova poderá dar uma razão que convença em definitivo. Segundo Bell (p. 8.13) e com base numa experiência piloto envolvendo oitenta alunos com idades compreendidas entre os onze e os dezassete anos, o olhar uma relação como verdadeira ou falsa a partir da testagem para um ou dois casos foi o nivel de prova caracteristico dos alunos com idade inferior a quinze anos. Bell concluiu, ainda, que os alunos não operam necessariamente em todas as situações ao mais alto nivel de prova de que são capazes.

Uma verdade afirmada com base numa constatação dos factos, não pode ser posta ao mesmo nivel que uma verdade fundamentada na razão. Enquanto que naquela os alunos se contentam com a observação, nesta há toda uma "libertação da acção e uma construção cognitiva complexa que assenta sobre formulações das propriedades postas em jogo e nas relações" (Balacheff, 1988, p. 45). A passagem, por parte dos alunos, da primeira para a segunda fase, sem desprezar e descurar a primeira pois, "...ela não é vista como uma muleta para as mentes fracas, podendo ser um meio poderoso para desenvolver internamente os conceitos matemáticos" (Theodore H. MacDonald, 1973, p. 103), será uma meta a atingir na educação matemática. Balacheff classifica as provas matemáticas em dois niveis fundamentais: as pragmáticas e as intelectuais. As primeiras recorrem à acção efectiva (manipulação de objectos, movimento do próprio corpo,...) ou à exposição onde as operações e os conceitos que ela mobiliza são dados a ver. Será o caso da soma dos n primeiros inteiros impares ser igual a n^2 apresentados da seguinte forma



1^2 2^2 3^2

(1) (1+3) (1+3+5)

Basta olhar para a figura para reconstruir as razões.

As segundas são as que se desligam da acção e repousam nas formulações das propriedades em jogo e nas suas relações.

"A passagem às provas intelectuais assenta, essencialmente, na tomada de consciência do carácter genérico das situações visualizadas inicialmente" (Sèmadéni, citado por Balacheff, 1988, p. 45), onde já não bastam os argumentos iniciais da evidência. Para tal é preciso uma descontextualização, uma despersonalização e uma destemporalização. Por descontextualização entende-se o abandono do objecto, lugar efectivo das realizações das acções, para aceder à classe destes objectos independentemente das circunstâncias em que eles surjam. A despersonalização consiste na separação da acção daquele que nela desempenhou um papel de actor e a destemporalização é a separação das operações das datas e da sua duração. Pode dizer-se, então, que a passagem das provas pragmáticas para as provas intelectuais faz-se quando são as acções interiorizadas que passam a ser postas em prática.

"As provas visuais trazem muitas vezes uma grande convicção"

(Watson, 1980, p. 165) e o seu problema está no facto delas, na maior parte dos casos, se referirem apenas a um caso particular, levando à perda de generalidade. Mas isto não tem que ser, pois pode "haver uma transferência directa para uma prova formal. Aliás, a prova formal e a interpretação intuitiva são perfeitamente congruentes" (Fishbein, citado por Balacheff, 1988, p. 390), desde que o agarrar intuitivo da prova não se processe apenas através de um caso particular, mas sim numa condição variável.

A demonstração, vista como um instrumento de prova, poderá ter na interacção social, por parte dos alunos, um motor quanto aos seus processos de validação. Ela poderá conduzir a um esforço de síntese das razões da validade podendo levar à elaboração de uma prova. Torna-se, deste modo, necessário que os alunos se apropriem da noção de demonstração como um meio de prova. Brousseau (citado por Balacheff, 1988, p. 39) considera que a colocação dos alunos numa interacção social possa suscitar fenómenos de tipo social ou afectivo de tal modo poderosos que permita um envolvimento socio-afectivo importante onde os alunos possam sustentar enunciados falsos ou mesmo recusar enunciados verdadeiros.

A elaboração de provas, por parte dos alunos, deverá ser acompanhada pela análise crítica das mesmas, onde haja uma constante exploração dos objectos matemáticos cuja verdadeira natureza está sempre a ser questionada. A elaboração de uma prova e a sua análise crítica são, assim, as duas faces de uma mesma moeda: a da validação de uma proposição.

Piaget (citado por Balacheff, 1988, p.67) mostrou o papel central desempenhado pela contradição geradora de desequilíbrios cuja ultrapassagem resulta em construções novas, podendo-se, deste modo, entender como uma das finalidades de um processo de prova o garantir a inexistência de contradições na solução de um problema. A contradição, porém, não se reduz à complexidade lógica e não existe por si mas sim "em relação a um sistema cognitivo" (Balacheff, 1988, p. 68). Assim, ela será reconhecida pelo professor mas não o será pelo aluno e vice-versa. Há, pois, que criar as condições necessárias para que o aluno tome consciência duma contradição e que, segundo Balacheff, são a existência de uma expectativa (predicção ou antecipação) e a possibilidade da construção de uma afirmação associada a esta expectativa e de uma afirmação associada à sua negação. As propostas de trabalho e o seu contexto a propor aos alunos deverão ser tais que possibilitem a concretização destas condições. O computador poderá desempenhar um papel relevante não só pelo impacto favorável que tem, neste momento, junto dos jovens, mas também pelas suas características próprias para além de facilitar a realização de um trabalho de equipa. No entanto, num estudo de pequena duração com alunos de idades compreendidas entre os doze e os quinze anos, Balacheff (1988) verificou que a interacção social, embora desempenhando um papel fundamental no ensino da demonstração, pode ser um obstáculo ao nível individual quanto à incapacidade de coordenação dos pontos de vista com os dos outros.

O estatuto que o sistema escolar confere ao professor, detentor de um saber científico ou escolar, dá-lhe o poder de decidir do carácter efectivamente contraditório de uma determinada situação. Ele deverá agir de modo a levar o aluno a este reconhecimento. Todavia, é preciso salvaguardar, tanto quanto possível, que o professor permaneça exterior às tomadas de decisão sobre a validade da prova e que as decisões sejam fundamentalmente do foro dos alunos.

Atitudes e Concepções

Cada vez é mais aceite por aqueles que se interessam pelo ensino da Matemática a existência de uma ligação bastante forte entre o sucesso (e insucesso) na disciplina e as atitudes e concepções que os alunos têm para com a Matemática. Schoenfeld (citado por Matos, 1990, p. 177) afirma que as perspectivas dos alunos em relação à Matemática afectam a forma como eles se comportam quando confrontados com um problema, influenciando por um lado a sua percepção do que é ou não relevante nesse problema e por outro as ideias ou recursos cognitivos que eles utilizam. Por seu lado, Stacey (1991) e com base em observações de alunos durante o desenvolvimento de um programa de resolução de problemas para o ensino secundário, concluiu que muitos deles ficaram impedidos de aflorar um problema porque acreditavam que a exploração pela tentativa e erro não era permitida na orientação da resolução de problemas em Matemática. Os alunos esperam ser capazes de olhar para um problema e escolher imediatamente um método matemático padronizado. Confrey (citada por Frank, 1988, p. 32) sugere que uma implementação bem sucedida de metodologias centradas no processo de resolução de problemas e que encoragem a independência, a persistência e a flexibilidade requer mudanças nas concepções que os alunos têm acerca da Matemática, ou seja, os alunos não serão capazes de melhorar a capacidade de resolver problemas se não mudarem as suas concepções sobre a Matemática.

Matos (1990) discute o conceito de atitude segundo duas posições distintas: a atitude como resposta a estimulos exteriores e a atitude como construção pessoal dos objectos e situações. A primeira posição é identificada como tendo uma raiz behaviorista onde é mantida a ideia de que as pessoas são elementos exteriores à realidade em que vivem e esta, por sua vez é totalmente independente do sujeito. Para Allport (citado por Matos, 1990, p. 178) uma atitude é um estado mental e neural, organizado através da experiência e que exerce uma influência directa e dinâmica sobre a resposta de um indivíduo a todos os objectos e situações com as quais está relacionado. As principais criticas a esta corrente assentam no pouco peso que ela dá ao aspecto social da aprendizagem, ao considerar o objecto da atitude como previamente definido independentemente do aluno e ao tender a explicar as atitudes através de factores em que o aluno não é considerado como interveniente (Matos, 1990, p. 179).

A segunda posição considera as pessoas como elementos activos na construção da realidade que, sob o ponto de vista da educação matemática, significa considerar que os alunos quando estão a aprender estão envolvidos num processo de construção do seu próprio saber. A realidade para esta corrente, é uma construção pessoal para a qual as pessoas usam a informação recebida em cada momento e a informação elaborada a partir da sua experiência e do confronto constante entre as ideias antigas e a realidade. "Não se trata do conceito tradicional de imagem que evoca habitualmente o reflexo interno de uma realidade externa" (Matos, 1990, p. 180), pois as pessoas são mais criadoras de informação do que utilizadoras ou processadoras de informação. A esta construção à qual as pessoas atribuem um significado é o que Matos (1990, p. 180) define por representação. Assim, a atitude exprimirá a orientação positiva ou negativa acerca do objecto da representação. Deste modo caracterizar a natureza da atitude de uma pessoa relativamente à Matemática corresponderá a explicar a sua representação da Matemática e analisar essa representação em termos valorativos.

Para Matos (1990) dentro de uma representação encontramos diversas concepções àcerca de aspectos diferenciados do mesmo objecto ou de objectos com ele relacionados. Por exemplo, em relação à Matemática encontramos habitualmente nas pessoas um conjunto de concepções sobre a utilidade, a sua dificuldade, a sua natureza, etc. (p. 180). A representação do objecto é, desta forma, vista como o resultado da estruturação de uma ou mais concepções.

Alguns autores (por exemplo Frank, 1988; Matos, 1990; McLeod, 1989) consideram as crenças ("beliefs") como um certo tipo de concepção. Para eles as crenças são as concepções que são aceites ou construídas pelas pessoas mas para as quais não têm uma fundamentação racional.

Para Rokeach (citado por Pehkonen, 1991, p. 48) as crenças são consideradas de difícil mudança e uma crença, ou um sistema de crenças, varia num sentido central-periférico: quanto mais central mais estará relacionada com outras crenças, mais ela resistirá à mudança.

As concepções matemáticas não se desenvolvem de um momento para o outro, levando o seu tempo de gestação e através de um processo baseado em experiências matemáticas. Frank (1988, p. 34) com base num estudo com vinte e sete alunos do ensino secundário concluiu que a concepção daqueles alunos àcerca da Matemática passava por crenças tais como a Matemática é cálculo, os problemas de Matemática devem ser resolúveis em poucos passos e o objectivo da actividade matemática é obter respostas certas.

Para a maioria dos alunos a sua experiência matemática é feita na aula de Matemática assumindo, deste modo, um papel fundamental tudo aquilo que lá é feito. A sua influência far-se-à sentir de forma bastante acentuada nas concepções dos alunos. "Estes aprendem muito mais do que os conteúdos matemáticos, eles desenvolverão concepções que podem ajudá-los ou a constrangê-los a resolver problemas" (Frank, 1988, p. 34).

O Computador na Matemática e no seu Ensino/Aprendizagem

O Computador e a Matemática

O computador é um instrumento de cálculo por excelência. Há programas computacionais que resolvem equações em ordem a uma dada variável, que simplificam expressões trigonométricas e logarítmicas, que efectuam operações com matrizes, que derivam ou primitivam uma função, que calculam o limite ou o valor da derivada de uma função num ponto (como por exemplo o MuMath, o Eureka e o MicroCalc). Esta capacidade é reforçada quer pela grande rapidez com que o computador processa os dados levando, por exemplo, apenas cerca de 1 μs (0.000001 s) a efectuar uma soma, quer pela sua fiabilidade, que na maior parte das vezes em que se costuma atribuir responsabilidades de erro ao computador, esse erro é provocado por dados errados fornecidos pelo utilizador.

Actualmente o computador é, também, um instrumento de demonstração. Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken demonstraram a conjectura das Quatro Cores, em que parte essencial da demonstração consiste em cálculos do computador. A Conjectura das Quatro Cores afirma que bastam quatro cores diferentes para colorir um mapa plano/esférico - enunciado pela primeira vez como conjectura matemática em 1852 por Francis Guthrie.

Noam Elkies refutou, recentemente (SPM, 1988, p. 62), uma conjectura de Euler, usando técnicas de Geometria Algébrica e trabalho de computador. Esta conjectura de Euler, anunciada em 1770, afirmava que seria preciso uma soma de n potências enésimas para obter uma potência enésima - dois quadrados para obter um quadrado (teorema de Pitágoras), três cubos para obter um cubo, ... O resultado encontrado foi

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$$

que refuta claramente a conjectura de Euler pois apenas são necessárias três (e não quatro) quartas potências para obter a quarta potência de 422481.

O computador, deste modo, está a pôr em causa o próprio conceito de demonstração, pois esta pode passar a estar dependente da correcção e eficácia de um algoritmo computacional.

Por outro lado, o computador é para a Matemática uma autêntica fonte de problemas. Por exemplo, a minimização do tempo que um programa demora a ser executado, bem como a do espaço que este ocupa na memória do computador dá origem ao estudo das propriedades de certos algoritmos e à avaliação da sua eficácia relativa (o algoritmo em si é um objecto matemático). É toda esta situação que leva a Matemática Algorítmica a ganhar cada vez mais peso nos dias de hoje, estando-se a inverter o paradigma dominante existente -- o da Matemática Dialéctica. Disto nos dão conta alguns matemáticos. Hersh e Davis (1980) afirmam que a Matemática do Egipto, da Babilónia e do Oriente Antigo era toda do tipo algorítmico (a que nos dá uma solução cada vez melhor, mas, onde quer que paremos, não teremos uma solução exacta -- exemplo da raiz quadrada de 2). A Matemática Dialéctica (estritamente lógica e dedutiva) originou-se com os gregos, mas não desalojou a Matemática Algorítmica. O próprio Euclides atribui à Matemática Dialéctica o papel de justificar uma construção (um algoritmo). Ainda segundo estes dois autores, é apenas nos tempos modernos que encontramos Matemática com pouco ou nenhum conteúdo algorítmico, que se poderá chamar de puramente Dialética ou Existencial (diz-nos que existe uma solução exacta que está localizada entre a e b mas não nos diz, muitas vezes, como achá-la). Para Henrici (citado por Davis e Hersh, 1980, p. 183) a Matemática Dialéctica é uma ciência rigorosamente lógica, onde as proposições são falsas ou verdadeiras, onde os objectos com certas propriedades específicas existem ou não. A Matemática Algorítmica é uma ferramenta para resolver problemas. Nunca teríamos enviado um homem à Lua se tivéssemos insistido em calcular as trajectórias com o rigor dialéctico. A Matemática Dialéctica convida à contemplação, a Matemática Algorítmica convida à acção. Aquela gera percepção, esta gera resultados. Para Davis e Hersh (1980) a atitude algorítmica não nega a atitude dialéctica mas recusa-se a continuar subordinada a ela. Para estes autores um bom algoritmo será utilizado mesmo que não exista uma demonstração rigorosa para ele, desde que exista uma experiência computacional que o valide.

O computador está, nos dias de hoje, a ser utilizado em Matemática como instrumento de investigação. Em 1987, na Universidade de Minnesota, treze eminentes matemáticos e especialistas de Ciências de Computação dos EUA, da França e da Inglaterra reuniram-se com o objectivo de usar o poder de um supercomputador CRAY 2 para esclarecer certas questões básicas de Geometria (SPM, 1988, p. 63). Em estudo estavam questões tais como a da classificação das Variedades de dimensão 3 (incluindo a questão de como melhor representar uma tal variedade num computador), Fractais, relações entre Geometria Hiperbólica e problemas de Estruturas de Dados, relações entre Geometria Diferencial e reconhecimento computacional de formas.

Na Teoria de Números, por exemplo, certos números com propriedades especiais são demasiadamente grandes e a melhor maneira de os descobrir é recorrer ao computador e ao seu "trabalho de escravo": começa-se por analisar um número relativamente pequeno até se encontrar o número pretendido. A maioria das equações diferenciais não possui solução exacta que, em muitos casos, apresenta comportamentos estranhos e é o computador que fornece a única possibilidade prática de se progredir no seu estudo. David

Hoffman e Bill Meeks (1984) estabeleceram a existência de uma família infinita de imersões mínimas completas em $\mathbb{R}^3$. Estes matemáticos mostraram que para cada k > 0 existe um exemplo dessas superfícies que é homeomorfo a uma superfície de gênero k da qual foram removidos três pontos. O plano, a catenóide e a helicóide eram os únicos exemplos até então conhecidos. Como se comportariam tais superfícies? Que propriedades satisfariam? Celso e Costa estabeleceu a equação de um exemplo destas superfícies de gênero 1, mas era tão complicada que o realce geométrico era obscuro. Para Hoffman e Meeks a simulação no computador ajudou a resolver o problema, pois foi possível construir uma imagem da superfície com a possibilidade de tirar indicações das suas propriedades essenciais que depois foram estabelecidas matematicamente.

David Griffeath (1988), um probabilista da Universidade de Wisconsin, está a dirigir uma investigação que assumiu um carácter experimental e as conjecturas formuladas iniciaram uma teoria matemática neste domínio.

Hoje fala-se em Matemática Experimental.

Para Ponte (1986) o computador pode ser utilizado para estudar as propriedades de quaisquer sistemas matemáticos abstractos, tornando-se um auxiliar precioso para a formulação e testagem de novas conjecturas que se procuram depois provar por métodos convencionais.

O computador já exerce uma influência muito grande na evolução da Matemática, quer no desenvolvimento de certas áreas de investigação, quer, mesmo, no apagamento relativo de outras.

Como transferir para o ensino da Matemática esta nova realidade?

O computador pode ser simultaneamente uma ferramenta e uma fonte de ideias e de inspiração, facilitando uma abordagem experimental e intuitiva da Matemática. Assim, o aluno poderá ser cada vez mais um construtor do seu próprio saber. Porém, "é necessário pensar em organizar experiências educacionais que lhe deverão ser proporcionadas, de forma a articular aspectos experimentais e intuitivos com aspectos que visem desenvolver todas as capacidades próprias duma mente matemática amadurecida, como as noções de organização e estrutura, o sentido de rigor e a aptidão para realizar demonstrações" (Ponte, 1988, p. 29).

O Computador e a Educação

Robert Taylor (1980) classificou as aplicações do computador na educação em três modos diferentes:

. O computador como explicador ("tutor").

. O computador como ferramenta ("tool").

. O computador como explicando ("tutee").

No modo explicador, quer na prática de exercícios ("drill and pratice") quer no CAI ("computer assisted instruction"), o computador é quem conduz todo o processo de aprendizagem. Pretende-se que o aluno resolva repetidamente o mesmo tipo de exercícios até adquirir uma determinada destreza. O grau de dificuldade dos exercícios vai aumentando à medida que o aluno vai atingindo as destrezas pretendidas e assim sucessivamente. Para Bork (citado por Veloso, 1987, p. 22) este modo de utilização tem as seguintes vantagens:

1ª. É uma aprendizagem interactiva (alterando positivamente a "passividade" dos alunos).

2ª. É a individualização do ensino (o aluno decide pelo caminho a seguir de entre várias opções; todos os alunos podem atingir o mesmo grau de sucesso escolar independentemente do tempo gasto em atingi-lo; o computador permite analisar as respostas de cada aluno bem como analisar o seu progresso; o computador assinala uma resposta errada e detecta, em muitos casos, a origem do erro dando, em seguida, sequências de aprendizagem ao aluno que foi confrontado com este problema).

3ª. É a ultrapassagem de preferências do professor por certos alunos.

As principais criticas a este modo de utilização do computador no ensino são referentes aos seus objectivos: transmissão de conhecimentos e aprendizagem de destrezas, não só de resolução de exercícios mas também de demonstrações de teoremas de Lógica. As criticas fundamentam-se, essencialmente, na sub-valorização de aspectos como os do desenvolvimento do espírito crítico e de descoberta dos alunos, que se distanciam bastante dos do modo explicador. Os criticos defendem uma metodologia de aprendizagem em grupo, onde haja confrontação e defesa de ideias e de estratégias diversificadas, observação mútua de processos de raciocínio, de prova e de refutação, em oposição à continuidade dos métodos do ensino tradicional com o aluno individualmente a resolver exercícios repetidos e testes com aumento de dificuldades.

No modo ferramenta o computador não é quem conduz o processo de aprendizagem. Neste modo todas as iniciativas do processo pedagógico, ritmo e organização do trabalho, residem no professor e nos alunos (o que é uma grande diferença em relação ao modo explicador). O "software" deste modo de utilização não pensa pelos professores nem retira a criatividade aos alunos. Ele exige grande imaginação e trabalho do professor, bem como de uma intensa actividade dos alunos, individualmente e/ou em grupo. O uso do computador como ferramenta leva a que o utilizador não necessite de saber programar.

No modo explicando são os utilizadores que ensinam o computador. Torna-se, pois, necessário saber programar para transmitir ao computador, em linguagem que este entenda, instruções que o utilizador quer que ele execute. A defesa deste modo de utilização é feita com base em três pontos chave:

1o. Não se é capaz de ensinar aquilo que não se compreende (a aprendizagem do explicador humano está garantida).

2o. Ao tentar fazer executar instruções relativamente complexas, pelo computador, que possui uma lógica limitada, o utilizador aprenderá como funciona o computador e como funciona o seu próprio pensamento (pois o computador é feito pelo homem com base no que o homem pensa que pensa).

3o. O computador é "rígido" (só executa aquilo para que está programado), é "paciente" (executa tantas vezes um determinado assunto, sem se aborrecer, quantas vezes quisermos) constituindo, assim, para os utilizadores, um "bom explicando".

Se bem que existam defensores acérrimos deste ou daquele modo de utilização do computador há um certo consenso de que se devem aproveitar todos os modos sem se excluir nenhum, a priori.

O Computador no Ensino/Aprendizagem da Matemática

Fey (1988), centrando-se nas perspectivas de desenvolvimento tecnológico e nas implicações dessas perspectivas para a Matemática escolar, considerou a revisão curricular e a revisão dos métodos de ensino de modo a poder tirar-se partido das novas tecnologias da informação, como uma das tarefas importantes na educação matemática: o que devemos ensinar? como devemos ensinar? o que é que os alunos podem aprender? Fey incidiu a sua atenção nas perspectivas de desenvolvimento tecnológico e nas implicações dessas perspectivas para a Matemática escolar, tendo considerado, na sua abordagem, seis secções principais: Cálculo Numérico, Cálculo Gráfico, Cálculo Simbólico, Representações Múltiplas da Informação, Programação e Ligações entre a Ciência da Computação, Curriculos de Matemática e a Inteligência Artificial.

Relativamente ao Cálculo Numérico, o computador e as calculadoras têm funcionado como ferramentas normais do trabalho matemático em todos os niveis, notando-se existir uma grande diversidade de opiniões no que respeita ao seu papel no currículo e no ensino escolar. Várias são as investigações que mostram que o acesso aos instrumentos de cálculo numérico alarga a aprendizagem e aumenta a capacidade de resolução de problemas da maioria dos alunos e sem efeitos nocivos evidentes. Nesta área, "software" como a Folha de Cálculo, os operadores de vectores e matrizes e os de análise estatística fornecem oportunidades atractivas para enriquecer o ensino dos conceitos e alargar o âmbito da resolução de problemas nos tópicos curriculares. Uma confirmação desta afirmação pode encontrar-se no trabalho de Moreira (1989) realizado com alunos do 6º ano de escolaridade. Para esta autora a Folha de Cálculo teve um efeito positivo na construção dos conceitos de proporcionalidade e de percentagem bem como na resolução de situações problemáticas e na análise de gráficos. Por outro lado, verificou-se uma tendência para os alunos espontaneamente experimentarem novos valores, novas relações entre os dados e fazerem a sua visualização gráfica, aspectos estes raramente observados no ensino usual. Ainda sobre as vantagens da utilização da Folha de Cálculo, Carreira e Tomé (1989) consideram que este "software" foi, para os alunos do 11º ano de escolaridade com quem trabalharam, um elemento originador de investigações cada vez mais incisivas, baseadas em análises de dados e de gráficos.

Estes resultados para além de confirmarem as afirmações de Fey mostram a importância dos aspectos numéricos quando utilizados em conjunto com os aspectos gráficos.

Para Fey (1980) os gráficos em computadores constituíram uma das contribuições mais estimulantes para a educação matemática na década de 80. Eles oferecem-nos enormes esperanças para alargar a compreensão dos alunos em importantes ideias matemáticas e para proporcionar métodos visuais alternativos na resolução de problemas em Matemática. É o que se pode inferir do trabalho de Trigueiros (1989), que utilizando a linguagem LOGO com alunos do 5º ano de escolaridade, concluiu que para eles se tornaram habituais as actividades de descoberta, a integração dos erros, a selecção de estratégias e o uso de várias técnicas de trabalho. A contribuição do computador para a recuperação de alunos do 9º ano de escolaridade em Geometria em situação de insucesso utilizando o GEM PAINT (um utilitário de desenho) e a linguagem LOGO é, também, assinalado por Neves (1989). Esta autora concluiu que com este "software" foram promovidos progressos significativos, quer no domínio de conceitos de Geometria, quer na capacidade de resolução de problemas geométricos não tendo havido diferenças significativas entre os dois ambientes de aprendizagem.

Quanto ao "software" para raciocínio simbólico, Fey (1988) afirma que existe um potencial para reformular o conteúdo e o ensino de vários tópicos, contudo os resultados e problemas que podem resultar dessa utilização são, ainda, bastante desconhecidos. Porém, uma das mais notáveis esperanças para o melhoramento da educação matemática por aplicação da tecnologia consiste nas várias aplicações de representações múltiplas e interligadas, de ideias e métodos matemáticos, baseadas no computador. A facilidade de passagem de uma forma de representação da informação para outra (numérica, gráfica, manipulação simbólica) à medida que o utilizador procura a compreensão conceptual e as soluções dos problemas é de facto bastante rico. Isto tornará possível mudanças fundamentais nos métodos de ensino e aprendizagem da Matemática.

A aceitação natural de que a aquisição de destrezas em programar possa desenvolver hábitos mentais que serão úteis em vários aspectos do aprender e fazer Matemática, não tem a força das investigações feitas. De facto, estas ainda não chegaram a provas convincentes sobre quaisquer efeitos significativos de transferência, havendo um interesse activo nesta área mas mais centrado no encontrar formas de tornar esta inter-relação eficaz.

Para Fey (1988) existe, ao momento, um pequeno, mas em expansão, corpo de investigação em educação matemática procurando combinar os avanços da ciência cognitiva e da inteligência artificial, para produzir sistemas tutoriais de computador "peritos" para vários assuntos. Os exemplos actuais mais impressionantes correm em máquinas bastante dispendiosas e lidam eficazmente apenas com aspectos limitados da Matemática. As capacidades de diálogo dos sistemas são muito limitadas, contudo, existe uma esperança muito razoável de que progresso seguro pode ser feito nesta frente, proporcionando, desta forma, uma outra maneira em que o computador pode vir a influenciar a forma da educação matemática.

Fey (1988), neste seu trabalho em que procura sintetizar a realidade existente ao nivel mundial, deixa bem claro que o potencial do uso da tecnologia para alargar o dominio da aprendizagem humana da Matemática e da resolução de problemas está apenas a começar a surgir nos projectos de investigação e de desenvolvimento sendo, ainda, pouco visivel no dia a dia das aulas de Matemática. Por outro lado fica a mensagem de que a utilização eficaz dos computadores no ensino pode permitir atingir a qualidade do ambiente de ensino/aprendizagem tão desejado pela maioria dos professores.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

As Grandes Opções Metodológicas do Estudo

Os fenómenos educativos são de tal modo complexos que as inúmeras variáveis existentes em cada um deles agem de uma forma intensamente interactiva. Torna-se, assim, difícil isolá-las bem como indicar claramente quais as causas que produzem um determinado efeito. O sentir o fenómeno educativo com esta perspectiva tem feito aparecer, segundo Ludke e André (1986), novas propostas de abordagens de investigação, de tipo qualitativo, de que se destacam a investigação participante, a investigação-acção e o estudo caso. Todas elas assentam em cinco características básicas que para Bogdan e Biklen (1982) são as seguintes:

1ª. A investigação qualitativa tem o ambiente natural como a fonte directa dos dados e o investigador como o seu principal instrumento. A grande justificação para que o investigador mantenha um contacto estreito com a situação onde ocorrem os fenómenos é o facto destes serem muito influenciados pelo seu contexto.

2º. Os dados recolhidos são predominantemente descritivos. Estes dados são fornecidos essencialmente por descrições de pessoas, de situações e de acontecimentos.

3º. A preocupação com o processo é maior do que com o produto. O grande interesse está em verificar como é que o problema do estudo se manifesta nas actividades diárias.

4º. O "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial do investigador. Existe todo o interesse em compreender a perspectiva dos participantes.

5º. A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. A grande preocupação dos investigadores não é encontrar evidências que testem hipóteses definidas antes do início do estudo, mas antes partir da análise dos dados num processo de baixo para cima: no início há questões ou focos de interesse muito amplos, que no fim se tornam mais directos e específicos. O investigador vai precisando melhor esses focos à medida que o estudo decorre.

A influência sobre os fenómenos, por parte do contexto onde eles se desenvolvem, é enorme, levando os investigadores a ter em conta as circunstâncias onde eles se desenrolam. Torna-se, pois, de uma importância fundamental para uma investigação na área da Educação, a recolha de dados descritivos tais como entrevistas, filmes, extractos de documentos e observações, de forma a conseguir-se a melhor caracterização possível de toda a complexidade presente na situação em estudo.

O investigador, para além de toda uma preparação cuidada da investigação (onde se reflectirão todos os pressupostos teóricos abraçados por ele), deverá acompanhar o mais perto possível o desenvolvimento dos trabalhos, tornando-se "obrigatória" a sua presença no local onde se desenrolam os fenómenos a estudar. Este facto, longe de limitar o processo de criação do conhecimento devido aos "olhos", aos "ouvidos" e ao "pensar" do investigador, é o caminho mais seguro para o fazer, pois é o que está mais próximo da construção da ciência pensada como um fenómeno social por excelência.

Participantes

Esta experiência pedagógica foi levada a cabo na escola secundária de Amato Lusitano, localizada em Castelo Branco, Beira Baixa, durante o ano lectivo de 1989/90. Com 2022 alunos inscritos no princípio do ano lectivo, a escola tinha 15 turmas do 10º ano de escolaridade, das quais 9 eram da via Ensino (formação vocacional de Desporto, Electrotecnia, Informática, Secretariado, Contabilidade e Administração, Introdução às Artes Plásticas Designe e Arquitectura) e 6 da via Tecnico-Profissional (formação vocacional de Produção Agro-Pecuária, Manutenção Mecânica, Contabilidade e Gestão, Secretariado e Informática). A aspiração ao ingresso no Ensino Superior não se verificava apenas nos alunos da via Ensino mas também nos alunos da outra via. Alguns destes alunos pretendiam vir a frequentar, mais tarde, o Instituto Politécnico de Castelo Branco, nomeadamente a Escola Superior Agrária.

A escola Amato Lusitano está ligada ao Projecto Minerva. Este facto tornou possível a utilização de uma sala com 8 microcomputadores (Amstrad, Philips e Unisys), seis dos quais com disco rígido. Estiveram envolvidos na experiência alunos de duas turmas do 10º ano de escolaridade, da responsabilidade de professores diferentes. Uma das turmas era da via Ensino e da área B (Informática), com 27 alunos já bastante familiarizados com o computador; a outra, da via Tecnico-Profissional e da área A (Agricultura), com 16 alunos e sem grandes contactos com o computador.

A escolha destas duas turmas para o estudo deveu-se ao facto de se pretender investigar o tópico de Matemática da Geometria Vectorial e Analitica, que se lecciona no 10º ano de escolaridade, e por estarem a cargo dos dois professores Armindo Lourenço e Carlos Salvado, que se ofereceram como voluntários para colaborar neste trabalho de investigação.

Proposta Pedagógica

O investigador forneceu a proposta original para o projecto e criou as actividades. Estas foram depois discutidas com os dois professores e modificadas de acordo com as indicações obtidas durante o desenrolar da experiência.

O estudo compreendeu duas fases (a primeira de introdução ao LOGO.GEOMETRIA e a segunda relativa à Geometria Vectorial e Analitica), ambas baseadas nos seguintes principios gerais:

1º A formulação e a resolução de problemas são importantes na formação matemática dos alunos;

2º A Geometria é uma das melhores oportunidades para aprender como é a realidade Matematica e é um bom veiculo para se fazer descobertas;

3º Um aluno que nunca tenha ensaiado organizar um material de estudo a um nivel local nunca o saberá fazer a um nivel global;

4º A aprendizagem é um processo onde os conhecimentos são construidos pelo próprio aluno a partir das suas experiências, relacinando-as com os seus conhecimentos anteriores;

5º O LOGO.GEOMETRIA é uma ferramenta que facilita as actividades de exploração em Geometria plana;

6º A atracção dos jovens, nos dias de hoje, pelo computador, poderá ser aproveitada se as propostas de trabalho a desenvolver com o computador forem em si mesmas, motivadoras e interessantes.

Todas as semanas, a partir do dia 13 de Março (para os alunos de Agricultura) e do dia 15 do mesmo mês (para os alunos de Informática) até ao fim do ano lectivo, os alunos tiveram uma aula de duas horas na sala dos computadores. Cada turma teve assim um total de 10 aulas com o computador. Eles tinham ainda aulas de uma hora na sua sala regular. Assim, e por semana, uma aula com computador alternou com as restantes (duas para a turma de Agricultura e três para a turma de Informática) sem computador, tendo sido organizada a articulação entre elas, de modo que até ao fim do ano lectivo fosse cumprido o que faltava do programa estabelecido para o 10º ano de escolaridade.

Houve sempre uma grande preocupação em conjugar o trabalho da aula com computadores e das aulas sem computadores, de modo que estas fossem complementares. Muitos dos aspectos que se pretendiam investigar eram desenvolvidos nas aulas sem computador e analisados nas sessões de trabalho que o investigador tinha com os dois professores (duas por semana e após cada aula com computadores).

1a Fase: Introdução dos Alunos ao LOGO.GEOMETRIA

Os alunos de Informática, que eram mais experientes na utilização do computador, foram introduzidos ao programa LOGO.GEOMETRIA em duas aulas. Os alunos de Agricultura, que tinham menos contacto com o computador, precisaram de quatro aulas. As instruções para a utilização do programa foram introduzidas de acordo com as necessidades de cada grupo, e aos alunos foi distribuído um cartão de referência com a maioria dos comandos. Esta introdução ao LOGO.GEOMETRIA foi orientada por duas fichas de trabalho, Fichas A e B (anexo 1), distribuídas aos alunos, contendo problemas para resolver com o computador. Estes problemas incidiam sobre conteúdos programáticos de Geometria leccionados em anos escolares anteriores.

2a Fase: Geometria Analítica e Vectorial

Após a introdução ao LOGO.GEOMETRIA, e nas aulas de duas horas, os alunos trabalharam com base em fichas de trabalho (anexo 2) que continham situações para explorar e problemas para resolver com o computador, referentes ao tópico de Geometria Vectorial e Analítica (Fichas 1/.../8). Pretendia-se que em cada aula fosse resolvida uma ficha, o que nem sempre aconteceu. Algumas vezes as últimas actividades das fichas transitaram para a aula seguinte. Os alunos da turma de Agricultura apenas conseguiram resolver as primeiras quatro destas oito fichas de trabalho. Este facto não significa que estes alunos tenham trabalhado com menos entusiasmo, com menos empenho e com menos aproveitamento. Ele apenas significa que os alunos daquela turma não conseguiram explorar tanto quanto os seus colegas as potencialidades do LOGO.GEOMETRIA, nomeadamente as do ficheiro GVA, bem como alguns conceitos e relações matemáticas (relativos à recta e à circunferência). Foi mais uma perda em extensão do que em profundidade.

No fim de cada actividade era pedido aos alunos um relatório sobre o que tinham feito, o porquê do que fizeram e as dificuldades sentidas para o fazerem. Pretendia-se, deste modo, recolher mais dados sobre o produto e os processos seguidos pelos alunos na resolução de cada actividade bem como das dúvidas surgidas ao longo da sua realização. Por outro lado, desejava-se que os alunos melhorassem a sua capacidade de argumentação e justificação das suas afirmações.

Os alunos trabalharam em grupos de 2/3/4 por computador: cinco na turma de Agricultura (GA1/.../GA5) e oito na turma de Informática (GI1/.../GI8). Um dos alunos tinha a seu cargo o teclado (função que era rotativa); os outros davam sugestões. Para cada actividade havia um aluno que tomava nota de todos os passos dados pelo grupo para a resolverem. Este aluno era o responsável pela elaboração do relatório relativo à actividade em causa (função igualmente rotativa). Os alunos discutiam entre si a maneira de resolver as actividades.

A forma como se decidiu identificar ao longo deste estudo o trabalho de um determinado grupo referente a uma certa actividade realizada foi designar em primeiro lugar o grupo, depois o número da actividade e finalmente o número da ficha de trabalho.

Por exemplo, ao identificar-se um trabalho com GA1,ACT4.3 está-se a dizer que o trabalho foi realizado pelo grupo 1 da turma de Agricultura na actividade 4 da ficha de trabalho Nº 3.

Todas as actividades da sala de aula, com ou sem computadores, eram conduzidas pelo professor da turma.

Nas aulas regulares o professor explorava o trabalho feito com o computador, fazendo sínteses, formalisando e propondo exercícios de prática. Algumas vezes, nestas aulas, eram apresentados aos alunos conceitos novos para serem, mais tarde, explorados com o computador. Para as aulas de duas horas era o professor quem trazia (e no fim recolhia) as disquetes com o LOGO.GEOMETRIA -- os alunos só trabalhavam com o programa durante as aulas. O chamamento (o "carregar") do programa no princípio foi feito pelo professor, ajudado pelo outro professor e pelo investigador (que estiveram sempre presentes em todas as aulas com computador). Os alunos depressa aprenderam a "carregar" o LOGO.GEOMETRIA e só não eram eles sempre a fazê-lo em todos os computadores por uma questão de economia de tempo (os professores e o investigador ao chegarem mais cedo à sala iam fazendo esse serviço). As fichas de trabalho eram distribuídas pelo professor no início de cada aula, uma a cada aluno. Em cada uma destas aulas o professor abordava todos os grupos, um por um, procurando pelas dificuldades surgidas, pelas estratégias utilizadas para a resolução das actividades, levantando questões, suscitando dúvidas. Algumas vezes o professor falou para toda a turma. No fim de cada aula era o professor quem recolhia os relatórios elaborados por cada grupo.

O professor que não era responsável pela turma em causa e o investigador assistiram às aulas com computador como observadores, embora, e sempre que solicitados pelos alunos, esclarecessem alguma questão relacionada com o trabalho em curso. O investigador chegou mesmo a tirar algumas dúvidas; a fazer perguntas a alunos para ficar a compreender melhor o que eles estavam a fazer; deu algum "feed-back" a alunos sobre os seus relatórios; na primeira aula da turma de Agricultura de introdução dos alunos ao LOGO.GEOMETRIA, e a pedido do professor, fez uma pequena apresentação oral do programa.

Antes dos alunos iniciarem o trabalho com o computador (Março de 1990), os professores envolvidos na experiência fizeram uma aprendizagem prévia do Logo.Geometria. Para tal, trabalharam durante algumas horas, repartidas por seis dias, com o programa sob a orientação do investigador. Esta aprendizagem foi feita com o suporte das fichas de trabalho A e B e ainda da ficha C (anexo 1). Pretendeu-se, assim, introduzir os professores no mesmo estilo de trabalho que mais tarde viria a ser introduzido aos alunos.

Materiais

O LOGO.GEOMETRIA

Para além do LOGO.GEOMETRIA, versão 03, de Agosto de 1989, da autoria de Eduardo Veloso, foram utilizados, nesta investigação, novos procedimentos criados pelo investigador (ficheiro GVA, anexo 3), de modo a possibilitar o tratamento da Geometria Vectorial e Analítica. Com estes novos procedimentos pretendeu-se criar as condições necessárias para que os conteúdos programáticos previstos pudessem ser trabalhados de forma eficaz. Assim, nasceram os construtores FAZ.V.COORD "u [u1 u2] (que constrói um vector dadas as suas coordenadas (u1,u2)), FAZ.R.EQG "r [A B C] (que constrói uma recta a partir da sua equação geral), FAZ.R.P.V "r "A "u (que constrói uma recta dados um ponto e um seu vector director), V.DA.RECTA "u "r (que constrói um vector director da recta dada) e FAZ.C.EQG "c [A B C] (que constrói uma circunferência a partir da sua equação geral). Para trabalhar o produto interno de dois vectores foram criados os procedimentos PROD.INT [u v] (que nos calcula o produto interno de dois vectores), PROJ.ORT.V [u v] (que nos calcula a projecção ortogonal de um vector sobre outro) e ANG.V [u v] (que calcula a medida da amplitude do ângulo de dois vectores). Para facilitar a relação entre o estudo analitico, vectorial e geométrico dos vectores, da recta e da circunferência foram construidos os procedimentos ESC.COORD.V "u (escreve as coordenadas do vector u), V.COLINEARES? [u v] (o computador dir-nos-á se os dois vectores são ou não colineares), ESC.EQG.R "r (escreve a equação geral da recta r), ESC.EQR.R "r (escreve a equação reduzida da recta r), ESC.EQA.R "r (escreve a equação axial da recta r), ESC.EQV.R "r (escreve a equação vectorial da recta r), ESC.EQP.R "r (escreve as equações paramétricas da recta r), ESC.EQC.C "C (escreve a equação cartesiana da circunferência c), ESC.EQG.C "c (escreve a equação geral da circunferência c) e ESC.EQP.C "c (escreve as equações paramétricas da circunferência c). Foi, ainda, construido o procedimento P.DA.CIRC? "P "c (o computador diz-nos se o ponto P pertence ou não à circunferência) que se considera útil para a resolução de problemas.

Fichas de Trabalho

As propostas de trabalho apresentadas aos alunos nas aulas com computador foram, genericamente, orientadas por um conjunto de fichas, cujos objectivos e justificação se apresentam de seguida.

Fichas A e B -- Com estas duas fichas procurou-se que os alunos:

. Iniciassem uma aprendizagem de trabalho em grupo (o que raramente acontecia na aula de Matemática).

. Trabalhassem ao seu ritmo próprio (e não a um ritmo imposto por factores exteriores a si -- pelo professor; pelos alunos mais "despachados").

. Experimentassem a resolução de problemas variados.

. Reflectissem sobre os caminhos seguidos para a resolução de cada situação com que eram confrontados através da explicitação do que fora feito e da discussão entre os elementos do grupo.

. Experimentassem (explorassem) várias pistas de resolução dos problemas, aproveitando as potencialidades gráficas do LOGO.GEOMETRIA.

. Começassem a sentir algum gosto pela Geometria com base nas actividades propostas e nas possibilidades oferecidas pelo LOGO.GEOMETRIA.

. Começassem a sentir uma certa necessidade em justificar as coisas (uma iniciação à organização local), como ponto de partida para a utilidade das demonstrações;

. Sentissem uma certa materialização dos conceitos, tantas vezes "apenas" memorizados.

. Começassem a sentir uma nova relação quer com o professor quer com os colegas quer, mesmo, com o saber.

Neste sentido, as actividades propostas nestas duas fichas de trabalho eram bastante abertas e abordavam conteúdos tratados em anos anteriores (como por exemplo, "Serão duas circunferências sempre homotéticas? No caso afirmativo, indicar como se determina o centro e o razão da homotetia"). Por outro lado, para cada actividade, eram indicados alguns procedimentos do LOGO.GEOMETRIA que eventualmente poderiam ser necessários para a resolver.

<u>Ficha 1</u> -- Com esta ficha pretendeu-se que os alunos recordassem o conceito de vector aplicado num ponto, bem como o de algumas operações (adição de vectores, produto de um número real por um vector,...). Pretendeu-se, ainda, que este conjunto de actividades contribuísse para uma melhor adaptação a alguns comandos chave do LOGO.GEOMETRIA, tais como, FAZ.P, VECTOR.P e ainda à "gestão" dos módulos do LOGO.GEOMETRIA. Com esta ficha pretendeu-se dar um passo para a criação de um "estilo" de trabalho que se queria participado e crítico (onde para além da discussão em grupo e com o professor, houvesse um esforço na transmissão de ideias e processos por via escrita -- com a feitura dos relatórios).

Ficha 2 -- O conceito de vector livre é um conceito complexo (para a generalidade dos alunos desta idade e com esta formação matemática). A ficha Nº 2 pretendia proporcionar uma noção da diferença entre vector livre e vector aplicado. O LOGO.GEOMETRIA ajudaria, com esta ficha, à introdução do conceito de vector livre? (note-se que o LOGO.GEOMETRIA só constrói vectores livres -- embora desenhe, também, representantes de vectores livres com origem num ponto qualquer). Para tal ser alcançado era de fundamental importância a reflexão feita pelos alunos em torno da explicação do facto do vector livre $\vec{AB}$ aparecer representado onde apareceu, bem como o que se passava com todos os outros vectores que fossem construidos. Veriam, os alunos, de uma forma intuitiva, a correspondência biunivoca entre os pontos do plano e os vectores livres do mesmo, fixada uma base?

Ficha 3 -- Nesta ficha era a noção de base que estava em jogo. Tratava-se da compreensão de que as coordenadas de um vector variam consoante a base em que se está a trabalhar.

Pretendia-se, ainda, que os alunos descobrissem relações com base na experimentação (no caso, a relação entre as coordenadas do vector soma com as coordenadas dos vectores parcelas, numa determinada base). Esta relação seria válida para todos os casos? Os alunos seriam confrontados com esta pergunta (estava prevista) de modo a sentirem a necessidade de justificarem o que sentiam intuitivamente.

Ficha 4 -- Nesta proposta de actividades aparece, já com maior nitidez, o desejo de centrar esforços na formulação e resolução de problemas como um aspecto fundamental e decisivo para um bom ensino/aprendizagem da Matemática. Com esta ficha pretendeu-se que os alunos descobrissem (com base na experimentação) a relação entre as coordenadas do ponto médio de um segmento e as coordenadas dos seus pontos extremos (e tal como na ficha anterior os alunos seriam levados a responder à pergunta da validade desta relação para todos os casos). Pediu-se, ainda, aos alunos, que formulassem um problema.

Ficha 5 -- Com a primeira actividade desta ficha de trabalho pretendia-se que os alunos intuíssem o conceito vectorial de uma recta. Os alunos teriam de relacionar os conceitos de vectores colineares e de soma de um ponto com um vector com a noção de recta. Chegarão os alunos à equação vectorial (geral) de uma recta?

Com as outras actividades pretendia-se reforçar a prática de formulação e de resolução de problemas. Como iriam utilizar os conhecimentos sobre os vectores? Como iriam servir-se do LOGO.GEOMETRIA?

Ficha 6 -- Com esta proposta de trabalho pretendia-se que os alunos descobrissem relações com apoio da experimentação e que fizessem e testassem conjecturas. Seria óptimo se alguns chegassem a demonstrar algumas das conjecturas. Em causa estavam as relações:

. coordenadas de um vector director de uma recta e os valores de A e B na equação geral da recta $Ax + By + C = 0$;

. declive de uma recta e as coordenadas de um seu vector director;

. declive de duas rectas paralelas;

. declive de duas rectas perpendiculares;

. condições de paralelismo e de concorrência de duas rectas a partir das suas equações gerais.

<u>Ficha 7</u> -- A resolução de problemas é um dos pontos fundamentais da ficha 7. Com as actividades 1 e 2 pretende-se que os alunos relacionem e apliquem conceitos já abordados como, por exemplo, o ângulo de duas rectas com o ângulo de dois vectores directores das mesmas; o ângulo de dois vectores com o seu produto interno.

Com a actividade 3 pretende-se que os alunos experimentem, generalizem e testem conjecturas fazendo muito uso do LOGO.GEOMETRIA.

A actividade 4 é uma situação mais geral, mais aberta, onde se espera que os alunos dêem aso à sua imaginação e criatividade.

Com a actividade 5 pretende-se que os alunos formulem problemas.

<u>Ficha 8</u> -- Esta ficha, como última ficha de trabalho com o computador e com o LOGO.GEOMETRIA no presente ano lectivo, pretendeu constituir um desafio final aos alunos. Nela foram propostas algumas situações problemáticas com um carácter globalizante. Os alunos para as resolverem teriam de fazer uso de muitos dos seus conhecimentos de Geometria Vectorial e Analítica bem como,

claro, da sua imaginação e criatividade.

Com a actividade 3 pretendeu-se mostrar aos alunos que em certas situações é mais prático, é mais rápido, é mais eficaz recorrer a um determinado dos vários caminhos que temos para resolver a situação. No caso da actividade 3 o caminho analítico seria o caminho mais eficiente, embora trabalhoso, para resolver a situação geral resultante da situação apresentada.

Instrumentos

Relatórios dos Alunos

No fim da resolução de cada actividade cada grupo de alunos tinha de escrever um relatório sobre o que fez, porque o fez e sobre as dificuldades sentidas ao longo do trabalho. Pretendia-se, deste modo, obter um documento que permitisse tirar algumas conclusões não só quanto ao produto final apresentado pelos alunos, mas também quanto aos processos e às estratégias por eles seguidos na resolução das situações que lhes eram apresentadas.

Os relatórios foram melhorando, sessão a sessão, tornando-se os alunos mais rigorosos e críticos à medida que o tempo ia passando. Houve sempre um esforço, por parte do investigador, em confrontar estes relatórios com as observações feitas durante as aulas (o que mostrou certas desfasagens entre o que se passava e o que se escrevia).

A feitura destes relatórios escritos, relatando os métodos utilizados, deu, aos alunos, várias oportunidades para discutirem com os seus colegas e para reflectirem sobre as suas estratégias. A justificação do raciocínio foi interpretada como um princípio de organização local.

Questionário aos Alunos

Foi elaborado um pequeno questionário pelo investigador (anexo 4) a que os alunos responderam no fim de todo o trabalho. Este questionário, anónimo, pretendia recolher dados referentes às opiniões dos alunos sobre o trabalho desenvolvido com o computador. O que dirão os alunos acerca das actividades matemáticas que foram desenvolvidas nas aulas com o computador? O que é que os alunos ficaram a pensar sobre o programa LOGO.GEOMETRIA? E sobre a utilização do computador na sua aprendizagem?

O anonimato, o tempo "ilimitado" para o preenchimento do questionário e o bom ambiente que foi criado nas aulas, na última das quais ele foi respondido, permite ter bastante confiança nos dados assim recolhidos.

Entrevista aos Professores

No fim dos trabalhos foi feita pelo investigador uma entrevista a cada um dos dois professores que participaram na experiência. Estas entrevistas foram realizadas entre o investigador e cada um dos professores em separado. Para tal foi elaborado um guião (anexo 5).

Que balanço fazem os professores do trabalho desenvolvido?

Houve melhorias em alguns aspectos? Quais? Na motivação dos alunos? No ambiente de trabalho? Na relação aluno/professor? Na relação aluno/aluno? Na relação aluno/Matemática?

Entende-se que os dados recolhidos através de uma entrevista são mais completos, mais ricos em informação do que os obtidos pelo preenchimento de um inquérito. Numa entrevista podem-se recolher dados através de um simples gesto, de uma simples omissão, pela própria forma como é dada a resposta a uma pergunta.

Diário de Registos

Foram feitos registos escritos num bloco de notas próprio para o efeito. Durante as aulas o investigador ia registando o que ia vendo e ouvindo (perguntas feitas pelos alunos sobre as actividades propostas; originalidade de processos na resolução dos problemas; dúvidas encontradas; ambiente de trabalho). Muitas vezes o investigador foi chamado por um dos professores para observar o trabalho interessante que determinado grupo de alunos estava a fazer, reforçando, deste modo, a quantidade de informação (de qualidade) recolhida. Estes registos eram completados com a discussão/reflexão que havia entre o investigador e os dois professores após cada aula com computadores.

Análise dos Dados

Os dados recolhidos através dos vários instrumentos utilizados foram sujeitos a leituras sucessivas e ao registo da interpretação dessas mesmas leituras de modo a que pudessem surgir os aspectos mais relevantes neles contidos.

Cada relatório era lido actividade a actividade e de forma global (a actividade 1, por exemplo, de todos os relatórios era lida e analisada e só depois se passava para a actividade seguinte) de modo a garantir um maior enquadramento de cada um no seu todo. Procuravam-se ver os resultados, os processos de resolução apresentados por cada grupo e as potenciais questões levantadas pelos alunos de modo a fazer-se, para além de uma identificação, uma sua comparação. Estas análises interpretativas por cada uma das turmas eram confrontadas uma com a outra e segundo este mesmo critério, à medida que ia sendo possível (as turmas tinham ritmos de trabalho diferentes). O diário de registos foi sempre um fornecedor de informação globalizante, permitindo relacionar muito do que os alunos escreviam e do que haviam feito aos olhos do investigador de modo a poder enriquecer a interpretação tirada do que este lia daquilo que os alunos tinham escrito. Após a leitura de cada relatório era feita a leitura do diário de registos de modo a poder-se ver o que fora registado do que se vira ter acontecido e o que fora comunicado por escrito pelos alunos. Desta forma os relatórios escritos eram melhor enquadrados na realidade vivida na aula. Este efeito era limitado pois os olhos do investigador só podiam estar virados para um grupo de cada vez. O diário de registos tinha a força da informação recolhida junto dos professores após cada sessão.

As entrevistas aos professores no fim do ano foram ouvidas várias vezes e passadas para o papel. A sua análise foi feita à luz dos grandes grupos orientadores e definidores do guião, tendo havido uma preocupação em ligar as palavras ditas pelos professores e todos os outros aspectos inferidos dos relatórios e do diário de registos.

O questionário aos alunos teve um tratamento um pouco mais formal, com uma formação de categorias. O motivo deve-se ao facto de se tratarem de opiniões onde essa categorização acabou por ser mais possível (duas opiniões categóricas com sentidos opostos podem ser colocadas em grupos perfeitamente diferenciados). Nesta categorização cada elemento só podia pertencer a uma das categorias definidas, cada um dos elementos (e todos) tinha de pertencer a uma das categorias definidas e deveria existir o máximo de objectividade nesta classificação. A classificação feita foi comparada com a dum outro juiz tomada com base no que os alunos escreveram. Algumas das tabelas elaboradas foram sujeitas ao teste do Qui-Quadrado no sentido de avaliar a significância das eventuais diferenças encontradas.

C A P Í T U L O 4

DESCRIÇÃO GERAL DAS ACTIVIDADES DESENVOLVIDAS

A descrição que a seguir se apresenta é baseada nos relatórios que os alunos entregaram no fim de cada aula com o computador, nas observações às aulas registadas no diário de registos e nos diálogos havidos entre o investigador e os dois professores responsáveis pelas duas turmas.

As Aulas de Introdução ao LOGO.GEOMETRIA

Estas aulas foram estruturadas tendo em conta a própria filosofia da linguagem LOGO: aprende-se, fazendo. Na primeira aula com computador e após as disquetes terem sido introduzidas nos computadores pelos dois professores e pelo investigador, os alunos distribuíram-se em grupos (pelas suas afinidades) pelos computadores existentes na sala. Foi dado, a cada aluno, um exemplar do cartão de referência contendo os principais procedimentos do LOGO.GEOMETRIA. A exposição, para toda a turma, por parte do professor (na turma de Agricultura foi o investigador quem o fez, a pedido do professor) sobre os rudimentos e principais características do programa, já pôde ser acompanhada, pelos alunos, com a leitura do cartão de referência e com o próprio programa. Nesta primeira intervenção, foram, ainda, abordados alguns aspectos técnicos, nomeadamente, a ligação do computador, o carregamento do programa, as teclas correspondentes a certos símbolos, o facto de só se poder utilizar 6 linhas para texto nalguns computadores (Unisys) devido a problemas de placa gráfica.

Após esta primeira fase, onde se revelou bastante útil (como auxiliares) a presença do outro professor e do investigador, foi entregue, a cada aluno, um exemplar da Ficha A e mais tarde (na aula seguinte) da Ficha B (com actividades relativas a conteúdos programáticos de Geometria Elementar trabalhados em anos lectivos anteriores) para serem resolvidas com o LOGO.GEOMETRIA. Pretendia-se que os alunos, ao trabalharem certos conhecimentos da Geometria Elementar, se fossem familiarizando com o programa. Por outro lado, pretendeu-se, também, que os alunos iniciassem uma prática matemática ligada à resolução de problemas.

Como era de prever, os alunos da turma de Informática mostraram-se mais expeditos na forma de estar com o computador: com mais à vontade e um melhor conhecimento do teclado. Alguns destes alunos chegaram mesmo a afirmar que achavam "o programa um pouco lento".

Constatámos a existência de um bom ambiente de trabalho e de uma motivação bastante grande. Os alunos que pediram para fazer intervalo (ao fim da primeira das duas horas da aula) foram muito poucos. "Isto é super fixe!", disseram alguns, ficando mesmo a trabalhar após o toque para a saída. Todos os alunos se envolveram no trabalho, desde os identificados como mais fracos até aos melhores alunos.

Os alunos solicitaram bastantes vezes os professores presentes no sentido de serem desbloqueados alguns aspectos referentes ao LOGO.GEOMETRIA (identificação de procedimentos; informação sobre a existência de certos procedimentos; esclarecimento do efeito de outros procedimentos).

Os alunos começaram a fazer uma aprendizagem do trabalho em grupo (a distribuir entre si as tarefas inerentes à feitura das diferentes actividades). Notou-se nestas primeiras aulas uma certa tendência para serem sempre os mesmos alunos a fazer certas tarefas, como, por exemplo, trabalhar com o teclado.

Os vários grupos iam resolvendo as actividades em tempos diferentes. Houve um ritmo bastante distinto entre os alunos das duas turmas. Enquanto que os alunos da turma de Informática gastaram duas aulas nesta fase (aliás, o número previsto pelo investigador), os da turma de Agricultura necessitaram de quatro. Este facto deveu-se não só à diferença de experiência na utilização do computador, mas também, e fundamentalmente, devido à diferença de conhecimentos de Geometria existente entre eles, nomeadamente quanto às transformações geométricas.

> "Talvez por já não nos lembrarmos muito bem o que são homotetias, tivemos algumas dificuldades, mas com a consulta do cartão de referência e alguma ajuda do professor ultrapassámos essas dificuldades",

são as palavras de um aluno da turma de Agricultura.

Esta abordagem foi de tal modo motivadora que levou os alunos a rever, a estudar em casa as transformações geométricas, para poderem ser capazes de, na aula com computador, resolver os problemas que lhes eram colocados. Os próprios professores das duas turmas estavam encantados, "Sinto-me feliz, mais rico", afirmou um deles; "Fiquei surpreendido, muitos dos alunos amorfos passaram a activos, e os activos mantiveram-se", disse o outro professor. Ambos afirmaram que a turma estava a ficar mais "aberta", com uma melhor comunicação com o professor.

O LOGO.GEOMETRIA com as suas capacidades gráficas permitiu situações muito interessantes como a que a seguir apresentamos:

Na 2a actividade da Ficha B era pedido aos alunos que verificassem se os dois triângulos dados no enunciado eram semelhantes. Um dos grupos decidiu apagar (não destruir) um dos triângulos (o que para os alunos seria a imagem do outro) para ver se o transformado que eles iam construir ia lá "cair" ou não (ver figura 3). Claro que após a construção deste triângulo imagem os alunos mandaram desenhar o triângulo "escondido", e verificaram que eles coincidiam, através do procedimento COINCID?.

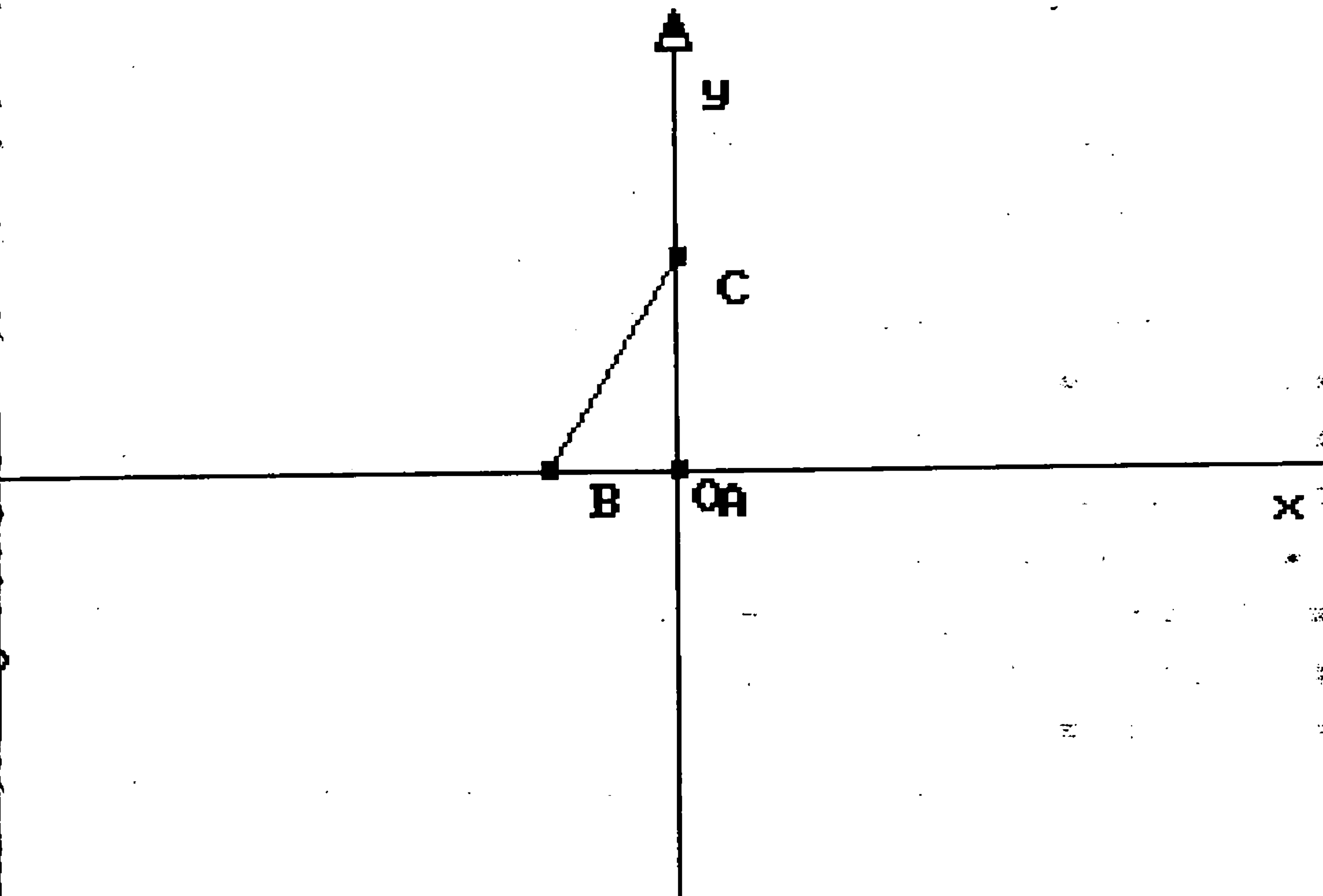
Um dos maiores obstáculos à utilização do LOGO.GEOMETRIA, durante estas aulas, resultou do frequente esquecimento, por parte dos alunos, em "carregar" os módulos necessários para a execução de determinados procedimentos.

> "Fizemos ROT ... mas não deu nada. Tinhamo-nos esquecido do módulo GEOMTRAN",

afirmou um dos alunos.

Porque é que todos os alunos, dos mais fracos aos melhores, se motivaram nesta fase inicial? Até que ponto os alunos mais fracos a Matemática pensaram tratar-se de uma hipótese (a última?) de poderem, ainda, vir a ter sucesso na disciplina? Tratava-se duma situação em que estes alunos pensavam estar no mesmo pé de igualdade que os melhores alunos? (note-se que os alunos só trabalhavam com o LOGO.GEOMETRIA nesta aula de duas

FIGURA 3



Legenda 3: Alguns alunos da turma de Informática apagaram um dos triângulos (o que iria ser imagem) para verem se o transformado que eles iam construir ia "lá cair".

horas). Foi o LOGO.GEOMETRIA em si, com as suas características próprias, que cativou os alunos? Foram as actividades matemáticas propostas? Foi o trabalho em grupo? Foi o facto de os alunos terem trabalhado ao seu próprio ritmo? Foi o ambiente vivido nestas aulas? Foi terem-se sentido como participantes numa experiência inovadora?

As Aulas da Resolução da Ficha de Trabalho No 1

Os alunos ao apagarem o referencial como lhes era pedido ficaram com toda a "folha de papel electrónica" (o "écran" do monitor) à sua disposição.

Actividade 1

A Construção da Figura

A generalidade dos alunos utilizou o comando FAZ.P [A B C D E F G H][...] de modo a construirem de uma só vez todos os pontos designados na figura do enunciado da ficha de trabalho (os vértices do quadrado de maiores dimensões e os pontos médios dos seus lados). A construção destes pontos um a um, revelando um não aproveitamento da rapidez de construção do LOGO.GEOMETRIA, verificou-se essencialmente nos alunos da turma de Agricultura. A construção da figura no seu todo foi executada por quatro processos diferentes. O mais utilizado foi o que recorreu a FAZ.POLI "p [A B C D A E F C H G] que construiu a figura à custa

de um só comando, aproveitando, deste modo, a rapidez de execução do computador. Os restantes processos foram os seguintes: a construção dos três quadrados [ABCD], [EBHI] e [DFIG] em que I(30, 30); a construção do quadrado [ABCD] e dos segmentos de recta [EF] e [GH]; e a construção dos segmentos de recta [AD], [EF], [BC], [AB], [GH] e [CD]. Estes processos, além de serem mais morosos, tinham o inconveniente de apresentar de forma menos clara o produto final (o LOGO.GEOMETRIA escreve o nome do segmento de recta. Por exemplo, FAZ.S "s [A B] constrói o segmento de recta [AB] e escreve o seu nome s, A ______ B
s).

A maior dificuldade sentida pelos alunos que construíram a figura pelo primeiro processo atrás referido foi quanto à ordem de colocação do nome dos pontos no comando FAZ.POLI. Bastava trocar a posição de A com C, por exemplo, para que a figura obtida fosse outra que não a desejada. Após algumas tentativas o objectivo era alcançado como se pode ver neste extracto de um relatório:

> "... Fizemos POLI "dog [A B C D E F G H][...] e deu-nos tudo cruzado. Em seguida apagámos o que tínhamos feito e desenhámos o polígono através da seguinte ordem POLI "dog [A B C D A E F C H G][...] e deu-nos o que queríamos" (GI2).

Curiosas as palavras <u>apagámos</u> e <u>desenhámos</u>. Será que o computador é mesmo a borracha e o lápis do futuro? O LOGO.GEOMETRIA libertou os alunos permitindo a construção de figuras geométricas de acordo com a imaginação, com a criatividade e com os conhecimentos de cada um.

Resolução das Alíneas

Construídos os vectores pretendidos à custa do construtor VECTOR.P (que constrói o vector definido por dois pontos), os alunos não tiveram dificuldade em somar AD com AB, alínea a), nem somar AG com AB, alínea b). Para tal, recorreram ao construtor SOMA.V.

Quase todos os alunos verificaram que os vectores obtidos, $\vec{AD} + \vec{AB}$ e $\vec{AG} + \vec{AB}$ eram os vectores $\vec{AC}$ e $\vec{AH}$ respectivamente, embora tenha existido uma certa resistência à verificação por parte de muitos alunos. "Isso vê-se logo", disseram bastantes alunos entre si e ao professor, quando este os abordava para se inteirar sobre o andamento da resolução das actividades. O processo mais utilizado foi o da utilização do procedimento CONTEUDO (o LOGO.GEOMETRIA através deste procedimento referente a um vector, CONTEUDO "u, indica a norma do vector de nome $\vec{u}$ e a medida, em graus, da amplitude do ângulo que o vector faz com o semieixo positivo dos xx, medido no sentido positivo). Foi, também, utilizado o processo de verificação da coincidência dos pontos extremos de cada par de vectores. Para tal, os alunos somaram o ponto A com cada um dos dois vectores em causa (para cada um dos dois casos), recorrendo ao construtor SOMA.P.V, e verificaram se os dois pontos assim obtidos eram ou não coincidentes (COINCID?).

Houve quem tivesse utilizado o procedimento DIST para calcular a norma de um vector, bem como o procedimento ANG.V para calcular a medida do ângulo que o vector fazia com o vector da base (com a direcção e sentido do semi-eixo positivo dos xx). Estes alunos socorreram-se da DIST e do ANG.V por desconhecimento, ainda, dos procedimentos NORMA e CONTEUDO, que lhes dava de imediato os valores que eles pretendiam. Este facto mostrou independência, autonomia e iniciativa por parte dos alunos, aspectos estes que muitas vezes lhes são negados nas aulas regulares.

Os alunos depressa apagavam as figuras geométricas que já não lhes faziam falta e rapidamente construíam outras -- sentiram-se a desenhar, a apagar e a construir.

O facto de terem existido quatro processos diferentes de construção da figura e dois para a verificação pedida nesta actividade vem, por certo, reforçar a ideia de que o LOGO.GEOMETRIA é um instrumento flexível que permite ser utilizado de acordo com a vontade e o desejo do utilizador.

Actividade 2

Com esta actividade pretendia-se que os alunos continuassem a familiarizar-se com o LOGO.GEOMETRIA. Recorreu-se, para tal, a um exercício simples de aplicação das operações com vectores aplicados num ponto, que os alunos, na sua generalidade, não tiveram dificuldade em resolver.

Alguns grupos tiveram dificuldades em como utilizar o procedimento PROD.K.V. Houve uma certa confusão entre o K e a constante pela qual queriam multiplicar o vector em causa. O professor foi muito solicitado por causa deste facto.

Reforçou-se, ainda, o pedido da verificação da coincidência de dois vectores. Com isto pretendia-se que fosse ficando claro para os alunos a necessidade da confirmação do que se vê, do que se visualiza, mesmo no "écran" de um computador.

A maioria dos alunos aceitou a evidência da figura. Nestas aulas já se começou a notar uma prática diferente, mais de acordo com uma rotatividade na execução de certas tarefas inerentes ao trabalho em equipa (teclado, registos). Houve descoberta com base nas discussões dentro dos grupos e no trabalho com o computador. "Já sei como é!", disse um aluno de um dos grupos no meio de uma discussão com o professor sobre a soma de dois vectores aplicados num ponto, quaisquer que eles fossem. Os alunos generalizaram e fizeram Matemática.

As Aulas da Resolução da Ficha de Trabalho No2

O conceito de vector aplicado num ponto já tinha sido trabalhado em aulas anteriores e o de vector livre era pressuposto ter sido abordado no 7o ano de escolaridade (veio-se a verificar que alguns alunos da turma de Agricultura o não haviam feito). A utilização do computador, permitindo a experimentação e a visualização, seria de grande utilidade para trabalhar o conceito em causa.

Actividade 1

Esta actividade pretendia levar os alunos a sentirem o vector livre como uma classe de equivalência de segmentos de recta orientados equipolentes. Desejava-se que os alunos experimentassem para mais alguns casos, por eles escolhidos, para além dos dois indicados na ficha de trabalho, de modo a responderem, com base na sua experimentação e observação, à pergunta formulada na ficha de trabalho.

Vários grupos de alunos se queixaram de dificuldades no desenhar dos representantes do vector $\vec{u}$. Um dos grupos (da turma de Agricultura) chegou mesmo a escrever:

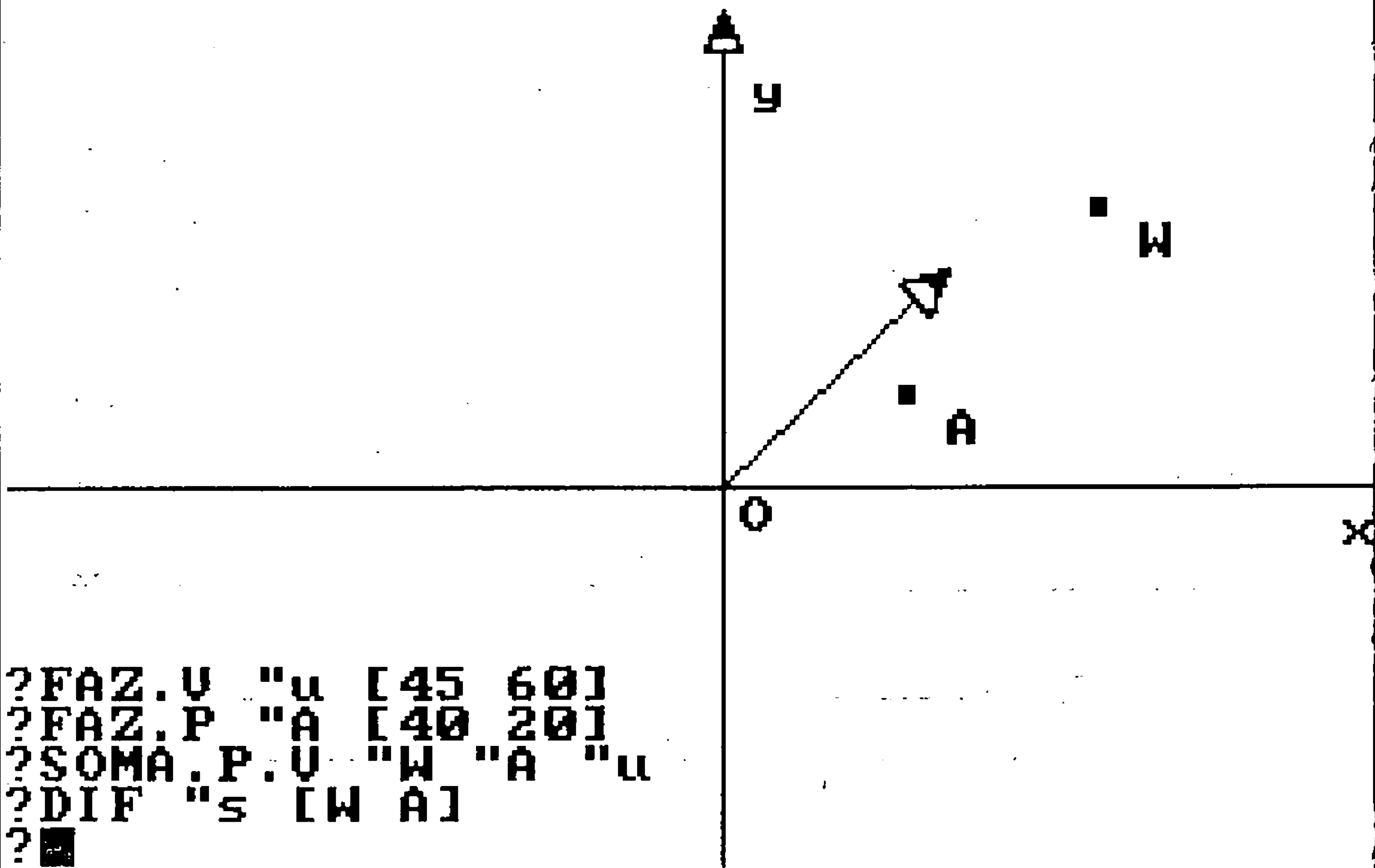
> "Tivemos dificuldades a realizar o trabalho pois nunca tinhamos trabalhado com vectores livres ..."(GA2).

A justificação mais utilizada para as dificuldades foi a de não saberem da existência do comando REP.V.P "u "A (o LOGO.GEOMETRIA desenha o representante do vector u aplicado no ponto A). Claro que podemos interpretar esta justificação como "desculpa de mau pagador". Na realidade houve um grupo de alunos da turma de Informática que relatou o seguinte:

> "... depois de desenhar o ponto A tentámos fazer o ponto soma do ponto A com o vector livre $\vec{u}$ e deu-nos o ponto W. Em seguida fizemos o vector definido pelos pontos A e W, ... , mas no ecran não nos apareceu nada, ...(ver figura 4)"(GI1).

Note-se que estes alunos não se limitaram a tentar fazer o ponto a que chamaram W. Eles construíram-no mesmo, só que duvidaram da sua existência pelo facto do vector $\overrightarrow{AW}$ não lhes ter aparecido desenhado onde eles esperavam (um segmento de recta orientado com origem no ponto A). É que o LOGO.GEOMETRIA tem o seu referencial próprio e a sua origem O é um ponto que não coincide com o ponto A dado no enunciado da ficha de trabalho. O LOGO.GEOMETRIA constrói os vectores livres através dos seus

FIGURA 4



Legenda 4: Após a construção do ponto A e do vector $\vec{u}$, os alunos construíram o ponto W através da soma de A com $\vec{u}$ e disseram não ter acontecido nada quando construíram o vector $\overrightarrow{AW}$ (GI1,ACT1.2).

representantes aplicados em O. Como $\vec{AW} = \vec{u}$, $\vec{AW}$ é representado pelo mesmo vector aplicado que $\vec{u}$ (o que levou os alunos a afirmar "que não lhes tinha aparecido nada"). O diálogo estabelecido entre estes alunos e o professor acabou por levar a "discussão" por um caminho que se planeara ter lugar na actividade 2 -- mais virado para a correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}^2$ e o conjunto dos vectores livres do plano (definido no plano um referencial (O, $\vec{e}$, $\vec{f}$)), o que mostra, mais uma vez, que não se pode prever tudo mesmo quando a preparação do trabalho é feita com bastante antecedência e com muito cuidado (aliás, este é um dos grandes atractivos da profissão de professor!).

Porém, as dificuldades existentes originaram bastante discussão entre os alunos e levou-os a solicitar o professor com muita frequência. Foram momentos muito animados.

> "Que nome damos ao representante do vector com origem no ponto A?",

perguntou um dos alunos ao professor. Foi bom e útil ter sido feita a pergunta, na medida em que levou ao estabelecimento de um diálogo entre os alunos e o professor. Deste diálogo "nasceu a luz".

Após a informação da existência de um procedimento que desenhava o que era pedido no enunciado (através de uma observação mais atenta do cartão de referência na posse de cada um dos alunos; por uma informação do professor a pedido dos alunos ou por uma informação do professor após constatação da existência de um impasse no desenrolar dos trabalhos de um determinado grupo), todos os alunos resolveram a questão. Esta situação revela, ainda, um pouco a forma como se processou a aprendizagem do

LOGO.GEOMETRIA -- a partir de situações concretas.

As dificuldades sentidas pelos alunos levou-os a tentar -- errar -- tentar de novo, bem como procurar a ajuda do professor, como se pode observar pelo seguinte relato de um grupo da turma de Informática:

> "... ao fim de sucessivas voltas (tentativas) e com alguma ajuda (muito pouca) do professor chegámos à óbvia conclusão, ..."(GI3).

"Infinitos", "Uma infinidade", foram as respostas dadas pela generalidade dos grupos à pergunta feita sobre o número de representantes do vector $\vec{u}$. A justificação, não pedida no enunciado, foi dada por seis dos grupos. Os relatos foram do tipo dos dois que a seguir se transcrevem:

> "Quanto à pergunta verificámos que como existe uma infinidade de pontos isso implica que se pode desenhar uma infinidade de representantes do vector, neste caso vector $\vec{u}$"(GI4),

> "Podemos representar tantos quantos os pontos que existem no plano"(GA4).

Tudo parece indicar que o Logo.Geometria permitiu que os alunos experimentassem, errassem e voltassem a tentar até poderem tirar algumas conclusões.

Actividade 2

Esta actividade 2 provocou a admiração geral.

"O LOGO.GEOMETRIA não fez nada", disseram muitos dos alunos relativamente à construção do primeiro vector livre $\vec{u}$. Quanto à construção do segundo vector, o vector $\vec{v}$, já chegou a haver alunos que previram o que ia acontecer, "o computador vai mandá-lo para a origem".

A visualização e a experimentação foram bastante importantes para a obtenção de uma resposta à pergunta feita na ficha de trabalho, como se pode ver pelo seguinte relato:

> "Nesta segunda questão as situações com que deparámos foram um pouco fora do normal. Depois de marcarmos os pontos A e B tentámos marcar o vector livre $\vec{u} = \vec{AB}$. Ficámos admirados com o que observámos. O vector u não tinha origem em A mas sim em O, a origem do referencial. Experimentámos depois com o vector livre v = EF e seguimos a mesma táctica e deparou-se-nos a mesma situação. ... Chegámos a uma conclusão: todos os vectores livres que mandámos fazer têm origem num só ponto, o ponto O do referencial"(GA1),

disseram os alunos deste grupo. Esta situação "fora do normal" deu origem a tentativas de justificação do facto, levando os alunos a interrogar-se sobre os porquês e a solicitarem a presença do professor para discutirem o assunto.

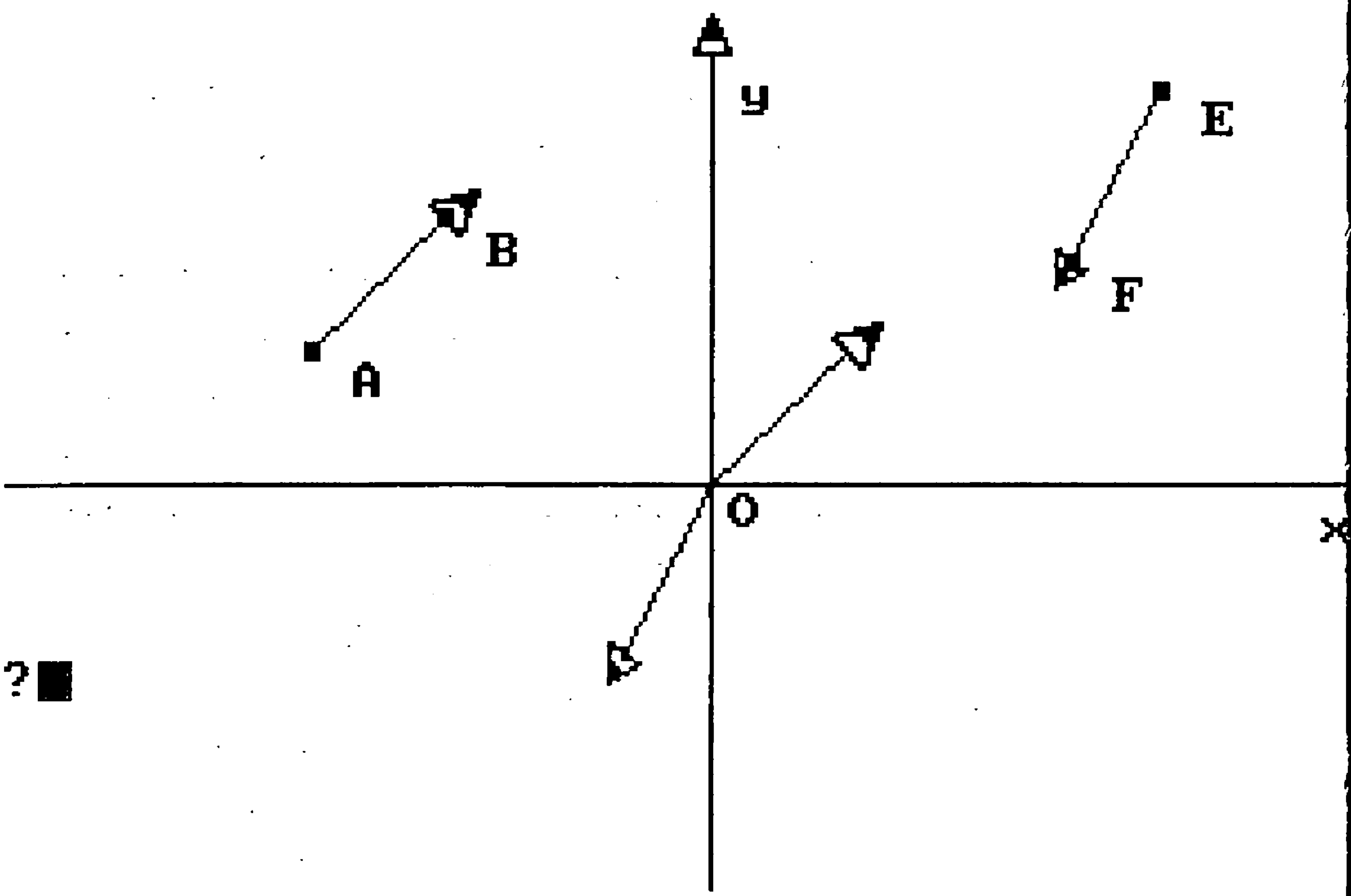
De facto, disse o professor,

> "Se há infinitos pontos no plano e se um vector livre pode ser representado por um qualquer dos seus representantes, entre os infinitos que existem, porque é que o LOGO.GEOMETRIA desenha os vectores livres através dos seus representantes com origem no ponto O e não noutro ponto qualquer?"

A justificação "mais simples" que alguns alunos encontraram foi a de que "o computador está avariado".

À pergunta do professor de quantos vectores livres estavam construídos no "écran" (ver figura 5) um dos alunos de um grupo da turma de Informática respondeu quatro. Os outros disseram dois. Os alunos não estão todos ao mesmo nível de conhecimentos, mas nestas aulas, a generalidade dos alunos esteve "em acção", em movimento, a pensar quer com os colegas do grupo, quer com o professor. A experiência vivida nesta aula vai ser fundamental para a continuação da abordagem do problema na aula seguinte, sem

FIGURA 5



Legenda 5: À pergunta de quantos vectores livres estavam representados no "écran" um dos alunos de um grupo da turma de Informática respondeu quatro. Os outros colegas dele disseram dois.

o computador. A fixação de um referencial e a correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os vectores livres do mesmo vai ser um assunto mais familiar aos alunos, com um suporte mais real e mais próximo de cada um. O trabalho com o LOGO.GEOMETRIA criou as condições para os alunos avançarem para a correspondência pretendida -- eles observaram, eles viram, eles fizeram, eles questionaram-se.

Na turma de Informática alguns grupos resolveram primeiro do que outros as duas actividades propostas na ficha de trabalho. A abordagem da correspondência biunívoca entre os pontos e os vectores livres do plano, fixado um ponto e uma base no mesmo, só deveria ser feita quando toda a turma tivesse resolvido as duas actividades da ficha nº2. Neste sentido, e nesta aula, foi proposto aos grupos que iam acabando de resolver as actividades que lhes tinham sido propostas no início da aula, a seguinte actividade,

> "Verificar se os vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ são ou não colineares. As coordenadas dos pontos são A(-60,25), B(-100,0), C(-120,60) e D(-80,40)".

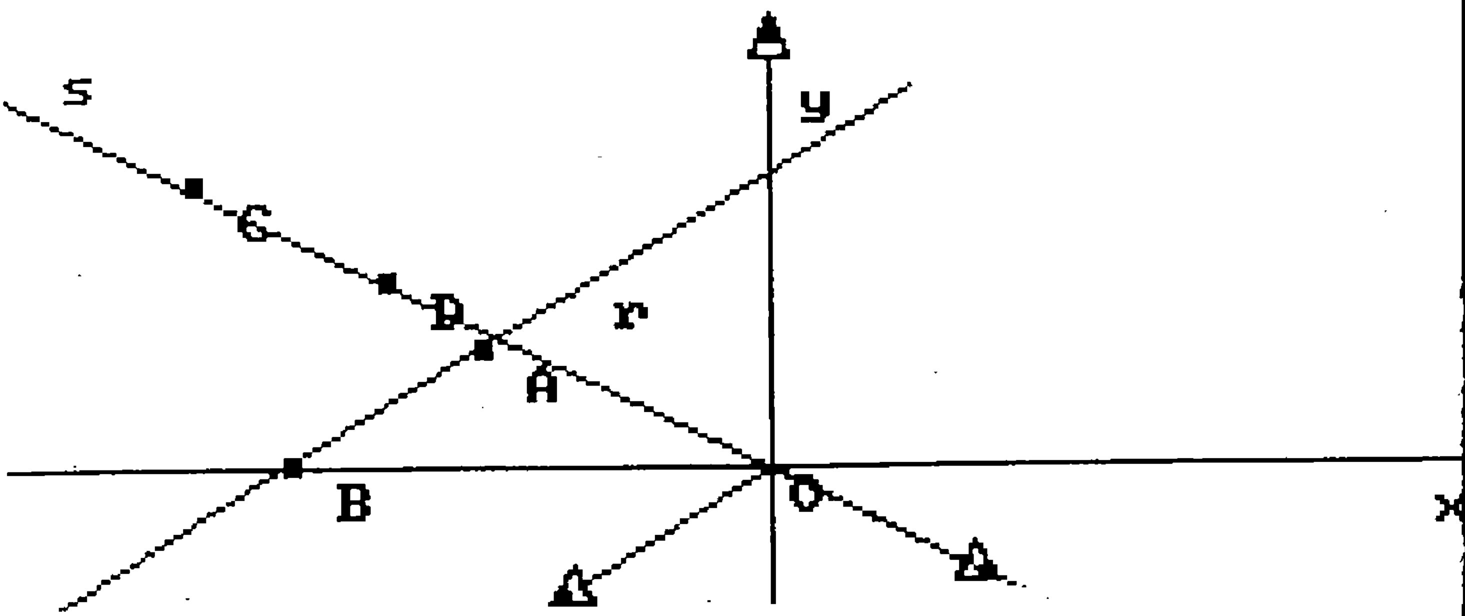
O enunciado, já trazido de casa (porque fora prevista a necessidade da sua utilização), foi escrito , pelo professor, no quadro verde existente na sala. Houve dois processos distintos de resolução: Um geométrico e outro misto (vectorial e com cálculos). No primeiro caso encontra-se a seguinte resposta,

> "Vamos pelas rectas suporte. Se elas forem coincidentes os vectores são colineares (ver figura 6)"(GI5).

No segundo caso salienta-se a seguinte resposta:

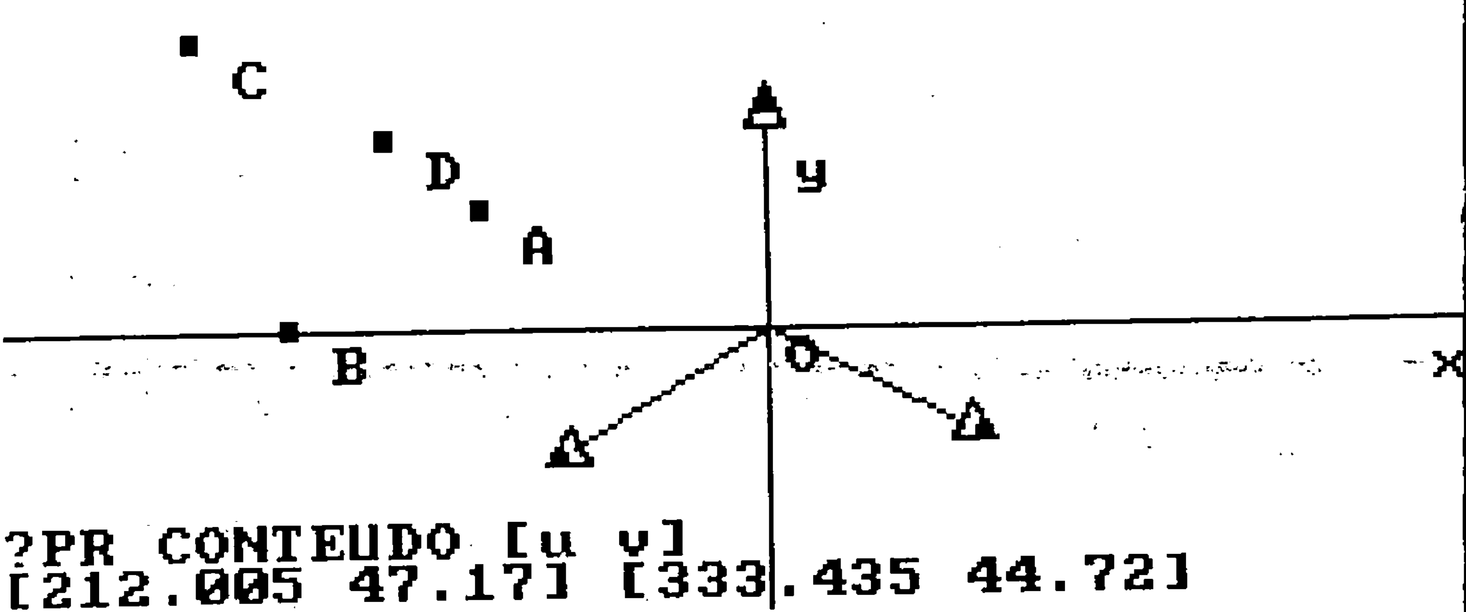
> "Fomos pelo CONTEUDO e vimos que os valores obtidos para $\vec{u}$ e para $\vec{v}$ não eram iguais (ver figura 7)"(GI4).

FIGURA 6



Legenda 6: Os alunos recorreram às rectas r e s para verem se os vectores eram colineares. Sê-lo-iam se as duas rectas coincidissem (GI5,ACT3.2).

FIGURA 7



Legenda 7: Se os resultados obtidos fossem iguais então os dois vectores eram colineares (GI4,ACT3.2).

É espantoso como mais uma vez os alunos seguiram vários caminhos diferentes para resolver a mesma situação.

Durante a resolução desta actividade foram levantadas questões sobre o ângulo de dois vectores (definição ainda não introduzida, aos alunos, nas aulas regulares e que o trabalhar com o computador obrigou a antecipar a sua abordagem -- para alguns alunos). A situação foi gerada devido ao procedimento CONTEUDO "u - que dá como resultado a medida da amplitude do ângulo que o vector $\vec{u}$ faz com o semieixo positivo dos xx, medido no sentido positivo, e, ainda, a norma do vector $\vec{u}$. Ora, o primeiro valor dado por CONTEUDO "u, não é a medida da amplitude do ângulo de $\vec{u}$ com o vector da base que tem a direcção e o sentido do semieixo positivo dos xx (que era o valor que os alunos queriam para resolverem o seu problema). Em vários grupos, o professor estabeleceu uma discussão viva com os alunos, chegando, mesmo, nalguns casos, a introduzir a definição de ângulo de dois vectores.

> "Trabalhar com o LOGO.GEOMETRIA permite uma maior interligação dos vários assuntos, levando a uma prática menos estática, menos rígida no tratamento dos conteúdos programáticos",

disse o professor no fim desta aula. O ambiente criado nestas aulas foi óptimo, e o empenhamento dos alunos também. "Meus amigos, vamos lá a arrumar o material", disse o professor. "Oh!!", disseram os alunos.

A turma de Agricultura está muito mais desenvolta e funcional no trabalho com o computador. Os alunos sentem que podem e que são capazes de fazer coisas com o que vão aprendendo.

Nesta aula a turma "puxou" pelos alunos, tendo-se estabelecido uma competição sã entre eles. "Olha lá, em que actividade já vão?", perguntou um aluno a um seu colega de outro grupo.

As Aulas da Resolução da Ficha de Trabalho No3

Na aula, sem computador, anterior a esta com computador os alunos já tinham sido introduzidos ao conceito de base.

Actividade 1

A Construção do Vector $\vec{u} = 3\vec{e} + 2\vec{f}$

Todos os grupos construíram o vector $\vec{u}$ através do construtor SOMA.V. Os vectores $3\vec{e}$ e $2\vec{f}$ foram obtidos à custa do procedimento PROD.K.V.

Resposta à Pergunta

Na actividade 1 era perguntado sobre a possibilidade de haver outra decomposição para o vector $\vec{u}$, na base $(\vec{e},\vec{f})$. "A decomposição é única", afirmaram todos os alunos. "Porquê?", perguntou o professor a um dos grupos. Os alunos justificaram com base no paralelogramo,

> "Para provar fizemos o paralelogramo e traçámos a sua diagonal. Por isso é impossível traçar uma diagonal equivalente com outras coordenadas"(GI1).

Trata-se de uma prova visual local? Mas não é, em si, algo de bastante positivo e prometedor para provas mais exigentes? Aí, o professor perguntou, "E se fosse outro vector que não o vector

$\vec{u}$?". "Também se passava o mesmo", responderam os alunos deste grupo. "E podemos experimentar para todos os casos?", tornou a perguntar o professor. "Não, mas!", responderam os alunos. Este diálogo foi interrompido neste ponto; o professor foi solicitado por um outro grupo deixando estes alunos a pensar e a discutir sobre a discussão havida.

Um outro grupo sentiu a necessidade de provar a validade da unicidade da decomposição e insistiu mais com o professor, pedindo-lhe ajuda. O professor deu-lhes uma pista (que considerassem vectores genéricos, com coordenadas genéricas, numa base qualquer; considerassem o mesmo vector $\vec{u}$ como podendo ser decomposto em duas combinações lineares diferentes; desenvolvessem essa relação e talvez chegassem a alguns resultados "esquisitos" com os dados de onde tinham partido). Estes alunos, embora não tendo apresentado uma demonstração no seu relatório, viveram, nesta aula, momentos de procura de uma prova para a unicidade da decomposição de um vector numa determinada base.

O constante questionar, o esforço de extensão e generalização das situações por parte dos professores foi uma prática intencional, desejada e preparada (todas as fichas de trabalho foram discutidas previamente com os professores). Quase todos os alunos argumentaram e defenderam o seu ponto de vista. Eles sentiram força, argumentos e à vontade para explicitarem as suas opções.

Actividades 2 e 3

Estas duas actividades eram do mesmo tipo, pretendendo-se que a actividade 3 fosse uma passagem para as bases ortonormadas.

Pretendia-se que os alunos interiorizassem que as coordenadas de um vector variam com a base em que se está a trabalhar.

Actividade 2

Dos sete grupos da turma de Informática (neste dia só funcionaram sete computadores levando a que os alunos tenham sido organizados em sete grupos), três deles resolveram a actividade de forma puramente analítica, tal como é apresentado no seguinte relatório:

" base $(\vec{g},\vec{h})$ $\quad\quad$ $\vec{u} = 3\vec{e} + 2\vec{f}$
$\vec{g} = -\vec{e} \iff -\vec{g} = \vec{e}$
$\vec{h} = -\vec{f} \iff -\vec{h} = \vec{f}$ $\quad\quad$ $\vec{u} = -3\vec{g} - 2\vec{h}$
base $(\vec{i},\vec{j})$ $\quad\quad$ $\vec{i} = -0.5\vec{e} \iff \vec{e} = -2\vec{i}$
$\vec{j} = \vec{f}$ $\quad\quad$ $\vec{u} = -6\vec{i} + 2\vec{f}$ "(GI6).

Três grupos resolveram primeiro analiticamente e depois foram confirmar com o computador. O sétimo grupo resolveu a actividade com o LOGO.GEOMETRIA, com intuição e com algumas "contas de cabeça" como poderemos ver através do seu relatório:

> "...Traçámos os vectores simétricos de $\vec{e}$ e de $\vec{f}$ resultando os vectores $\vec{g}$ e $\vec{h}$ respectivamente. De seguida obtivemos um vector soma $\vec{s}$ na base $(\vec{g},\vec{h})$ com a combinação linear $\vec{s} = 3\vec{g} + 2\vec{h}$. Concluímos que o vector $\vec{s}$ é o simétrico do vector $\vec{u}$ (traçámos o simétrico de $\vec{s}$ e concluímos que eles coincidiam). Concluímos, também, que na base $(\vec{i},\vec{j})$ o vector $\vec{u}$ era-nos dado pela combinação linear $\vec{u} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$"(GI3).

O artigo indefinido "um" escrito na frase "obtivemos um vector soma $\vec{s}$", está, segundo a nossa interpretação, associado ao nome do vector soma (há muitas letras à escolha) e não ao vector em si.

Mais uma vez os alunos escrevem nos seus relatórios a palavra "traçámos", mostrando, deste modo, a maneira como encaram as figuras que vão aparecendo no "écran" dos monitores -- são eles e não o computador quem as constrói. Se são eles quem constrói através do computador, de uma forma fácil, sem grande esfôrço, porque é que houve esta tendência tão grande de resolução através do lápis e do papel sem o recurso do LOGO.GEOMETRIA? É fruto das suas concepções da Matemática e da própria utilidade do computador (este serve para confirmar o que foi feito)? Por ser de resolução imediata com o lápis e papel? Ou porque esta actividade apresentava a dificuldade do sentido de orientação dos vectores da base $(\vec{g},\vec{h})$ -- da direita para a esquerda e de "cima" para "baixo", respectivamente? Foi este sentido de orientação dos vectores da base que dificultou a resolução geométrica/vectorial do problema? Para a maioria dos alunos o vector $-3\vec{g} - 2\vec{h}$ não podia ser o vector $\vec{u}$, pois, este era $+3\vec{e} + 2\vec{f}$. No fim da aula ficou a dúvida se os alunos responderiam afirmativamente à pergunta,

> "$\vec{u} = 3\vec{e} + 2\vec{f} = -3\vec{g} - 2\vec{h}$? Ou seja, trata-se do mesmo vector?".

Esta dúvida transitou para a aula seguinte sem computador.

> "Sim, são o mesmo vector. As coordenadas são diferentes porque as bases também o são",

resposta obtida na aula regular do dia seguinte -- esta informação foi dada pelo professor respectivo, referindo, ainda, que quatro alunos haviam hesitado em relação à resposta a dar, mas que após a intervenção de um dos colegas toda a gente afirmou tratar-se do mesmo vector. Aliás, este professor afirmou também que os seus alunos, na sua maioria, haviam ficado com a noção de vector livre.

"Para mim não é mensurável", disse este professor ao referir-se à diferença que sente existir, para melhor, entre o trabalhar com o computador na sala de aula e o trabalhar apenas com o quadro, o giz e a voz. Acrescentou, ainda, o seguinte:

> "A diferença fundamental está nas discussões que o trabalho com o computador provoca entre os alunos e entre estes e o professor. Aliás, está a haver uma certa mudança nas minhas aulas sem computador. As discussões são iniciadas com base em questões levantadas no trabalho com o computador (particularmente na aula a seguir à aula com o computador) onde a iniciativa já não é exclusivamente minha. O mais aborrecido é não poder utilizar o computador sempre que queira."

Os alunos da turma de Agricultura manifestaram uma certa dificuldade em resolver esta actividade, sendo os seus relatórios muito incompletos. Curiosamente estes alunos abordaram o problema com o LOGO.GEOMETRIA. Será significativa esta diferença de comportamento entre os alunos destas duas turmas? Será que para quem não está tão envolvido no sistema de ensino - exposição do professor - resolução de exercícios com lápis e papel - exposição do professor, "agarra" mais facilmente uma proposta de trabalho onde a visualização geométrica tem mais força?

O professor da turma de Agricultura fez uma observação sobre a actuação de um aluno que nestas aulas com o computador era o dinamizador do grupo enquanto que nas aulas sem computador era calado e inibido. "Vantagens da mudança de estratégias e de meios!", disse ainda este professor.

A intuição teve um papel muito importante na resolução desta ficha de trabalho. Um dos grupos da turma de Agricultura intuiu que $\vec{u}$ seria igual a $-3\vec{g} - 2\vec{h}$ e depois foi verificar no computador.

Os alunos da turma de Agricultura resolveram esta ficha de trabalho em duas sessões e não apenas numa. Justifica-se perfeitamente o facto, pois, para além de se tratar de uma turma com alunos de passado bastante insucedido a Matemática, apenas é contemplada com quatro horas semanais de tempo lectivo nesta disciplina.

O investigador perguntou aos alunos de um dos grupos da turma de Informática que havia terminado a resolução da actividade 3, quando é que haveria coincidência entre as coordenadas de um ponto M qualquer e as coordenadas do vector $\vec{OM}$. Os alunos pensaram um pouco e depois um deles afirmou que isso aconteceria quando se estivesse a trabalhar na base o.n. do LOGO.GEOMETRIA.

Esta resposta foi tão brilhante que levou o professor a fazer a pergunta a toda a turma e a provocar uma pequena discussão entre todos os alunos sobre o assunto. No fim de toda esta movimentação o professor acabou por referir a resposta dada pelo grupo atrás citado. Notou-se, por parte dos alunos deste grupo, uma grande satisfação e orgulho em terem sido nomeados pelo professor perante toda a turma. Tratou-se de um reforço positivo utilizado algumas vezes durante estas aulas com o computador.

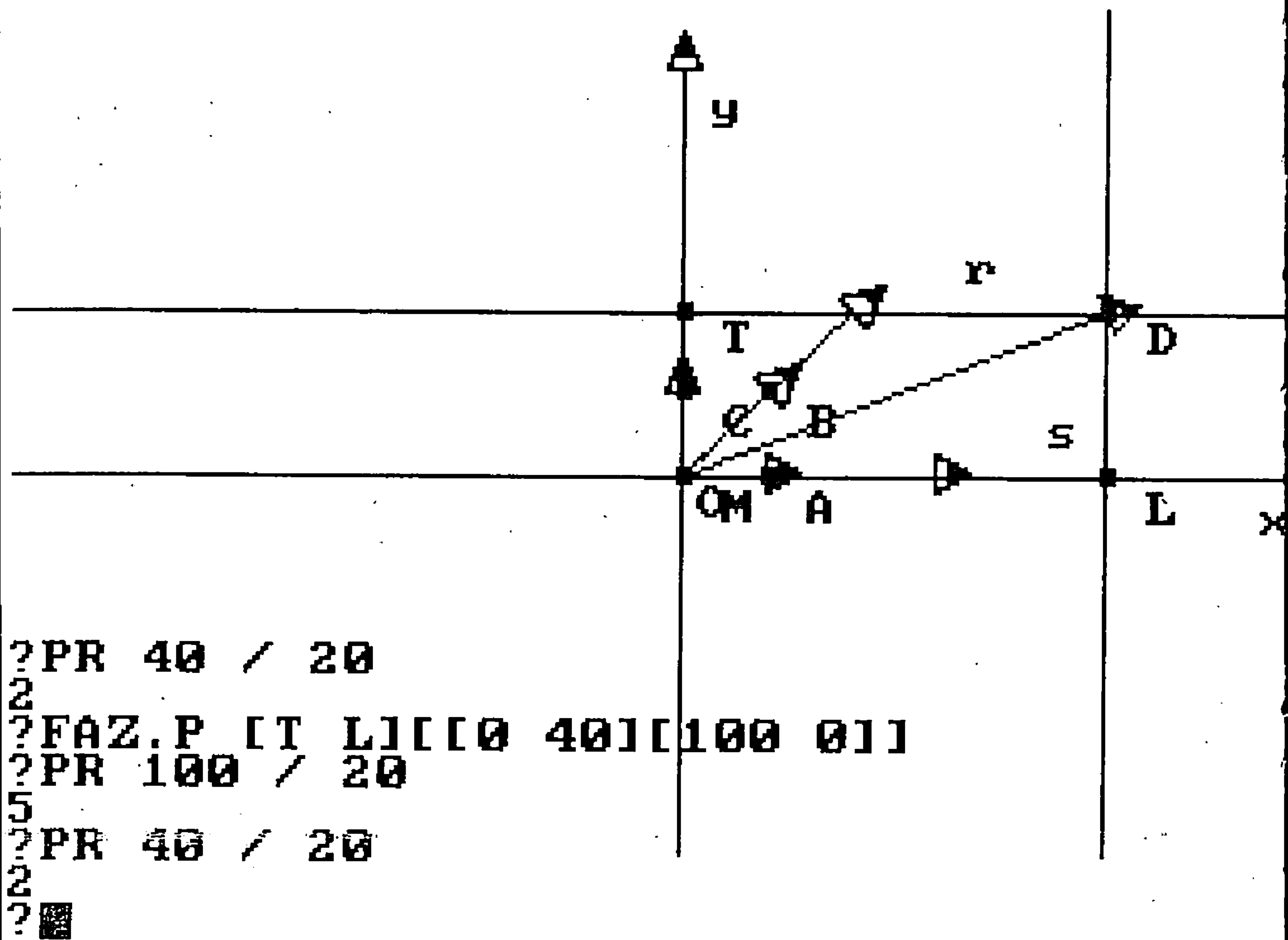
Actividade 3

Todos os grupos da turma de Informática resolveram esta actividade com recurso ao LOGO.GEOMETRIA. A generalidade dos relatórios são do tipo do que aqui se apresenta:

"Na base $(\vec{e},\vec{a})$, $\vec{u} = 5\vec{e} + 2\vec{a}$(ver figura 8)"(GA4).

Como justificar esta mudança na prática destes alunos? A

FIGURA 8



Legenda 8: Na base o.n. $(\vec{e},\vec{a})$ tem-se $\vec{u} = 5\vec{e} + 2\vec{a}$ (GA4,ACT3.4.3).

situação apresentada nesta actividade 3 era de resolução mais imediata sob o ponto de vista geométrico?

Os alunos da turma de Agricultura resolveram esta actividade com recurso ao LOGO.GEOMETRIA e de uma forma bastante satisfatória. Os relatórios estão bastante bons. Eis um extracto representativo do que estes alunos escreveram:

> "... construímos o ponto C e o vector $\vec{a} = \vec{MC}$ FAZ.P "C [0 20] e VECTOR.P "a [M C]. Efectuámos, depois, a soma do ponto M com o vector $\vec{u}$ e por este ponto desenhámos duas rectas, t e s, paralelas aos eixos xx e yy, respectivamente. Calculámos as intersecções entre s e x e entre t e y e marcámos os pontos G e L. PR INTERSEC [s x] e obtivemos (99.999 , 0). FAZ.P "G [99.999 0] e depois PR INTERSEC [y t] e obtivemos (0, 39.995). Em seguida FAZ.P "L [0 39.995]. Construímos o vector $\vec{i} = \vec{MG}$ e calculámos de seguida as normas de $\vec{e}$ e de $\vec{i}$
>
> PR NORMA [e i] 20 100
>
> Seguindo o mesmo método chegámos aos valores 20 e 40 para os outros dois vectores.
>
> Fizemos a seguir uma verificação
>
> PROD.K.V "q 5 "e
>
> PROD.K.V "j 2 "a
>
> SOMA.V "z "q "j e chegámos à conclusão que o nosso raciocínio está correcto e que efectuámos a questão que nos foi posta"(GA1).

A leitura deste relatório permite ficar com uma ideia bastante clara do que foi feito pelos alunos deste grupo. Mostra bem que compreenderam o que se queria e que verificaram (embora não dizendo como chegaram à conclusão: Só à vista? ou recorreram a processos já utilizados anteriormente?) com bastante à vontade e naturalidade. Este aspecto é, quanto a nós, muito importante e já é, talvez, um fruto de todo este processo.

Gostaríamos, ainda, de deixar registada a parte final do relatório de um outro grupo desta turma. Para além de um grande entusiasmo que o relatório deixa transparecer, ele revela o quanto os alunos tiveram de batalhar para chegarem ao fim da resolução da actividade. Talvez um dos problemas principais do insucesso não seja a "preguicite" mas sim a falta de motivação. Eis o extracto do relatório a que nos estamos a referir:

> "... ao fim de uma longa busca exaustiva do nosso grupo 'os persistentes', ... , conseguimos ao fim de mil e um processo de procura, ... "(GA3).

Pensamos que este relatório nos permite antever a existência de um animado trabalho de grupo.

Actividade 4

Com esta actividade pretendia-se que os alunos descobrissem a relação entre as coordenadas do vector soma e as coordenadas dos vectores parcelas e a demonstrassem.

Todos os alunos verificaram que $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v} = -\vec{e} + 4\vec{f}$ e relacionaram as coordenadas de $\vec{z}$ com as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. "Essa relação é válida para todas as situações?", perguntou o professor aos alunos dos vários grupos. Estes responderam que esta relação se mantinha para dois vectores quaisquer mas não houve nenhum grupo que a tivesse demonstrado. Claro que houve tentativas como a que a seguir apresentamos:

> "...já que fossem quais fossem as suas coordenadas, as coordenadas do vector soma seriam sempre a soma das coordenadas dos vectores parcelas"(GI5).

Os alunos generalizaram para todos os casos apenas com base nos que lhes foram apresentados na ficha de trabalho. Não sentiram a necessidade de testar essa relação, aceitando-a como certa mesmo sem a terem demonstrado. Haverá alguma atenuante pelo facto de ser a última actividade a ser resolvida nesta aula e o tempo já ser escasso para a resolver? Ou será, ainda, a ausência de um saudável espírito matemático resultante de um ensino mecânico e repetitivo?

As Aulas da Resolução da Ficha de Trabalho No 4

Actividade 1

Construção do paralelogramo

Registaram-se dois processos diferentes para a construção do paralelogramo: um com recurso ao construtor do LOGO.GEOMETRIA FAZ.POLI e o outro pela intersecção de dois pares de rectas paralelas. Alguns alunos construíram o paralelogramo pedido no enunciado com um dos vértices na origem do referencial e um dos lados pertencendo ao semi-eixo positivo dos xx. Este facto é revelador de uma certa intuição por parte destes alunos. A vantagem da escolha destes paralelogramos veio a evidenciar-se aos seus olhos, de uma forma mais nítida, quando efecturam uma verificação por via analítica.

Resolução da actividade

Embora se pedisse uma verificação vectorial a maioria dos grupos fez a verificação por via analítica. Para tal foram verificar se o ponto médio das diagonais coincidia ou não. Este processo é mais intuitivo? Está mais próximo da sua prática matemática? Talvez possamos afirmar que, neste momento, trabalhar com vectores ainda é pouco familiar para os alunos, para além, claro, de ser um assunto mais abstracto.

A resolução vectorial surge por exemplo no seguinte relatório de um dos grupos da turma de Informática:

> "Depois de termos traçado o paralelogramo, traçámos dois vectores que definiam as diagonais. Achámos depois dois vectores com metade da norma dos primeiros e somámos estes pontos com os pontos origem, tendo obtido dois pontos coincidentes. Pode-se, portanto, concluir que as diagonais de um paralelogramo se bissectam"(GI3).

Houve alunos que sentiram a necessidade de confirmar se as coordenadas destes dois pontos assim obtidos coincidiam com as coordenadas dos pontos médios de cada uma das duas diagonais.

As dificuldades sentidas (mais nos alunos de Agricultura) foram devidas ao facto dos alunos não terem sido capazes de "construir o ponto médio de um vector" (palavras de alguns alunos). Esta situação atrapalhou-os. Estes alunos não foram capazes de ver que o ponto que eles pretendiam poderia ser obtido através da soma de um ponto com um vector. Pensamos ter sido esta a causa principal da fuga para a resolução analítica, vindo a confirmar o que atrás foi dito.

Com a proposta desta actividade pretendia-se mostrar aos alunos que se poderia chegar à mesma conclusão seguindo caminhos diferentes. Pedia-se que fosse utilizada a via vectorial pois pensava-se que, para eles, a via analítica era mais evidente, mais familiar. Tratava-se de mais uma situação para encaminhar os alunos para o facto de que muitas vezes a utilização da via vectorial ou da via analítica está dependente essencialmente do tipo de problema a resolver e da maior ou menor facilidade da sua resolução com cada uma delas.

Actividade 2

O LOGO.GEOMETRIA continuou a permitir a materialização de ideias, de pistas de trabalho mais ou menos criativas para a resolução dos problemas.

Para descobrir a relação pedida na actividade 2, o grupo GI2, seguiu o seguinte caminho (ver figura 9). Os alunos intersectaram a bissectriz do ângulo a com o segmento de recta [AB]. Pediram as coordenadas do ponto de intersecção (que para eles seria o ponto médio de [AB]) e ficaram admirados porque estes valores não coincidiam com os indicados na ficha de trabalho. Chamaram o professor e lá discutiram a questão com ele. Foram postos em jogo vários conhecimentos de Geometria e por fim, os alunos concluíram que este processo só daria o ponto médio do segmento quando os ângulos a e b fossem geometricamente iguais. O diálogo estabelecido foi muito animado.

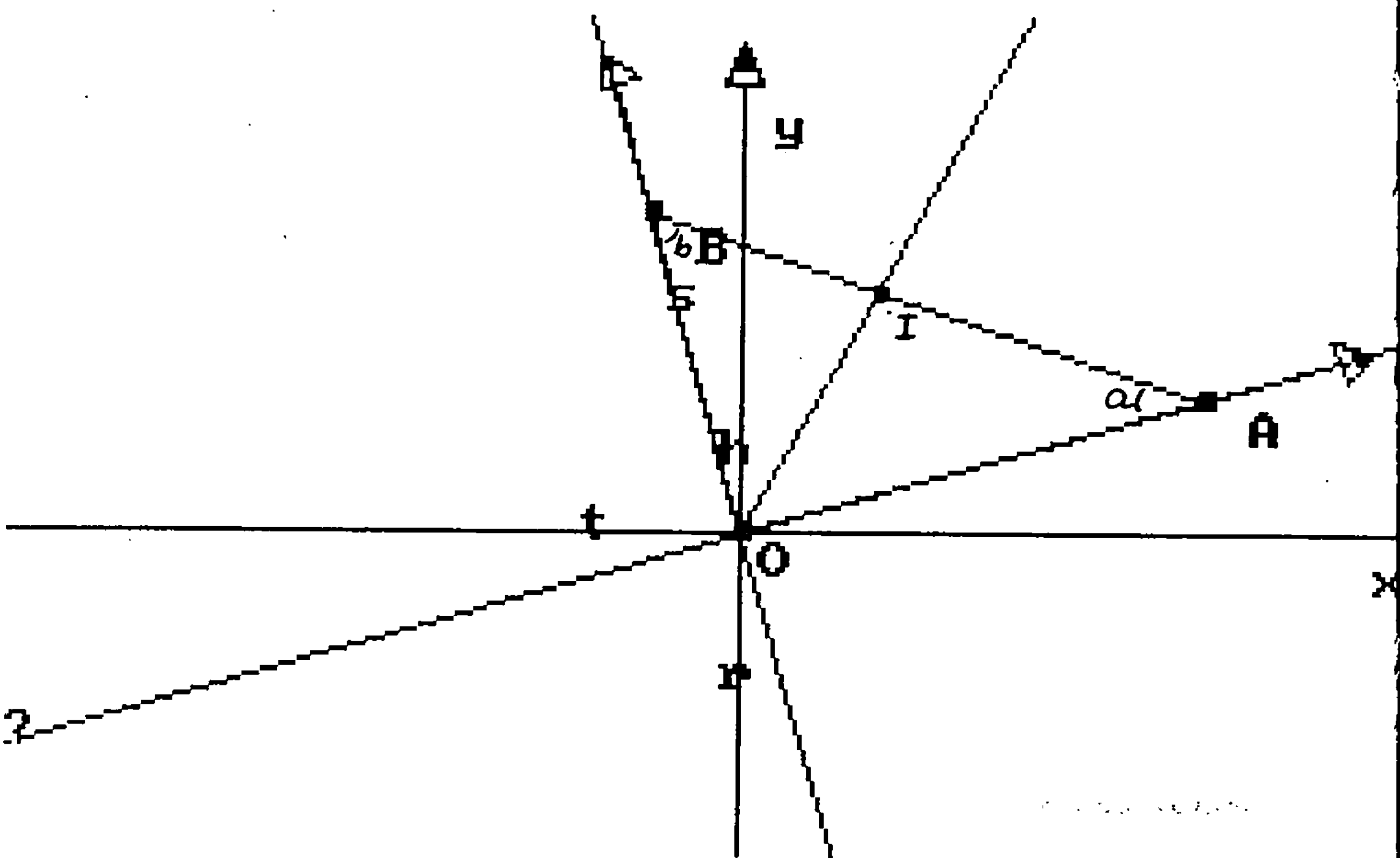
> "Não passava pela cabeça de ninguém que alguém pensasse encontrar o ponto médio do segmento [AB] por este processo",

afirmou o professor.

Todos os grupos estabeleceram a relação entre as coordenadas do ponto médio do segmento de recta dado e as coordenadas dos seus pontos extremos. Alguns dos grupos generalizaram e testaram a relação encontrada. O extracto do relatório do grupo GA1 mostra como os alunos fizeram a sua experimentação:

> "... Considerámos outro segmento de recta t com os extremos C e E, FAZ.P "C [-130 80] e FAZ.P "E [20 50] e FAZ.S "t [C E]. Fizemos os seguintes cálculos (-130 + 20)/2 e (80 + 50)/2 e pedimos ao computador as coordenadas do ponto médio de t e obtivemos o par de valores (-55, 65) ..."(GA1).

FIGURA 9



Legenda 9: Na intersecção da bissectriz do ângulo $A\hat{O}B$ com o segmento de recta [AB] os alunos deste grupo esperavam encontrar o ponto médio de [AB] (GI2,ACT2.4).

Alguns dos grupos (três), e talvez muito por consequência das perguntas, a que os alunos têm vindo a ser submetidos, do tipo "E isso é válido para todos os casos?", acabaram por sentir a necessidade de demonstrar a relação encontrada.

> "O sôtor, como é que poderíamos demonstrar que esta relação era válida para todos os casos?",

perguntaram os alunos de um dos grupos ao próprio investigador. Os alunos acreditavam na universalidade da relação encontrada, bem como na possibilidade de a demonstrarem.

As demonstrações apresentadas foram da seguinte forma:

" $B(x2,y2)$
$M(a,\ b)$
$A(x1,y1)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} &\Leftrightarrow M - A = B - M \\
&\Leftrightarrow (a,b)-(x1,y1) = (x2,y2)-(a,b) \\
&\Leftrightarrow (a-x1,b-y1)=(x2-a,y2-b) \\
&\Leftrightarrow a-x1 = x2-a \\
& b-y1 = y2-b \\
&\Leftrightarrow a = (x1 + x2)/2 \wedge b= (y1 + y2)/2
\end{aligned}$$

"(GI2).

O facto de três grupos terem feito a demonstração por sua iniciativa, sem ter sido pedida, bem como ter havido experimentação com testagem, pode ser interpretado, talvez, como sinónimo de uma certa viragem quanto às concepções dos alunos face à Matemática e às suas leis bem como quanto ao seu papel na sua aprendizagem.

Actividade 3

A maior parte dos grupos apresentou uma resolução puramente analítica, feita no caderno, com base na relação obtida na actividade 1:

" $-60 = (x - 10)/2$
$\Leftrightarrow -120 + 10 = x \Leftrightarrow x = -110$
$25 = (y + 40)/2$
$\Leftrightarrow 50 - 40 = y \Leftrightarrow y = 10$
B(-110, 10) "(GI6).

Porém, alguns grupos utilizaram o LOGO.GEOMETRIA e fizeram a construção do ponto pedido através de formas criativas e interessantes. Eis duas delas dos alunos da turma de Informática:

> "Após construirmos os pontos A e M traçámos o vector $\vec{AM}$ e depois com PROD.K.V fizemos o vector $2\vec{AM}$. De seguida determinámos o ponto B através da soma de um ponto com um vector, $B = A + 2\vec{AM}$. Para sabermos as coordenadas do ponto B usámos o comando CONTEUDO "B (ver figura 10)"(GI4),

```
" FAZ.P [M A][[-60 25][-10 40]]
      FAZ.S "a [M A]
      PR DIST [M A]   --->   52,2
      FAZ.C "b [M 52.2]
      RECTA.S "s "a
      PR INTERSEC [s b]
     coordenadas de B são (-110,10).
     (Ver figura 11)"(GI6).
```

Parece-nos pertinente afirmar que graças à presença do computador na sala de aula, os alunos tiveram possibilidade de resolver o problema sem o recurso exclusivo da "fórmula".

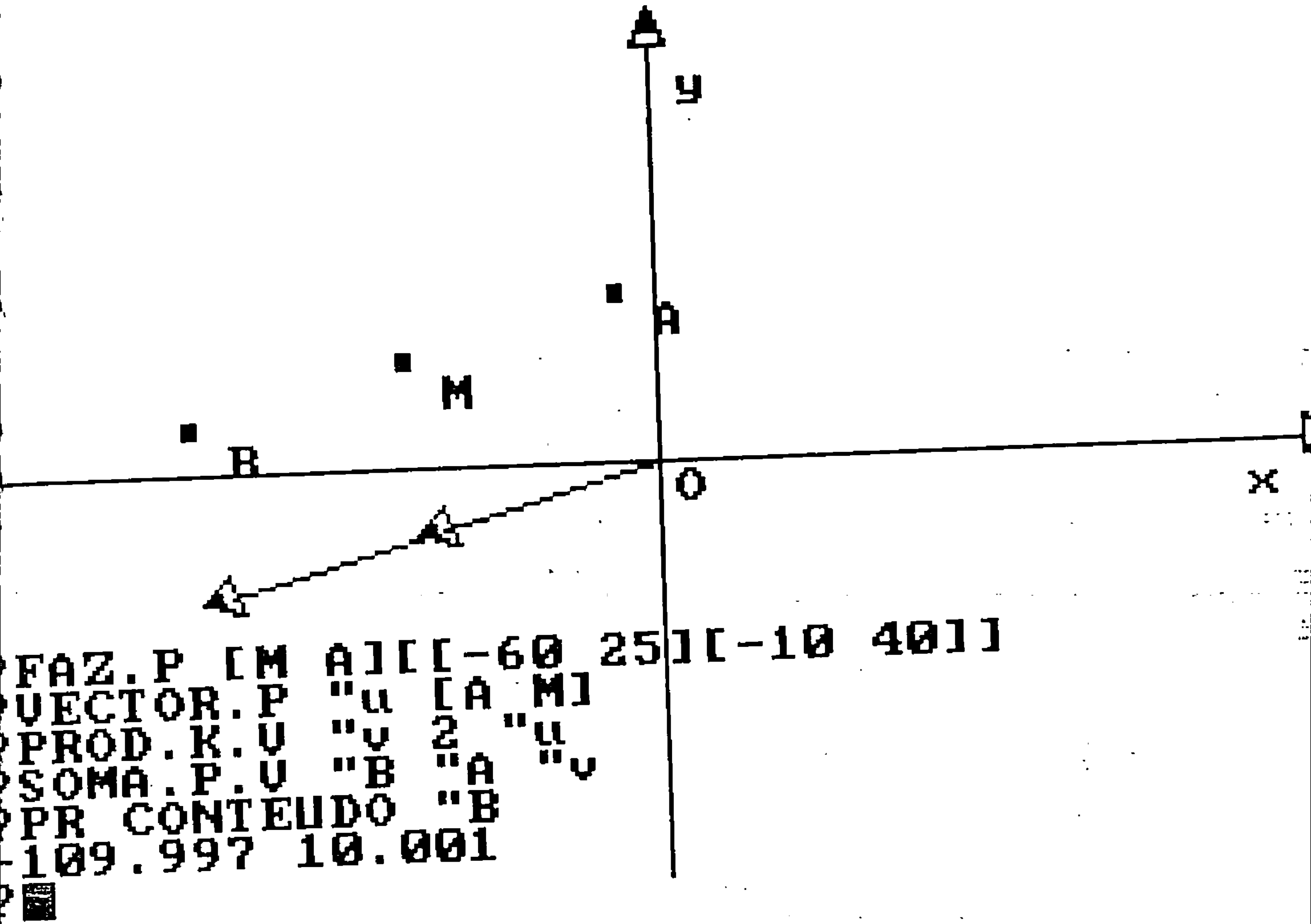
Actividade 4

Alguns grupos não formularam nenhum problema, outros formularam mas não apresentaram uma resolução e outros formularam e indicaram uma resolução. Houve, ainda, quem tivesse apresentado um mero exercício, como o seguinte:

> "Considera um referencial $(O,\vec{e},\vec{f})$ e os pontos A(5,1/2) e B(-1,3/2). Calcula as coordenadas do ponto médio de [AB]"(GI4).

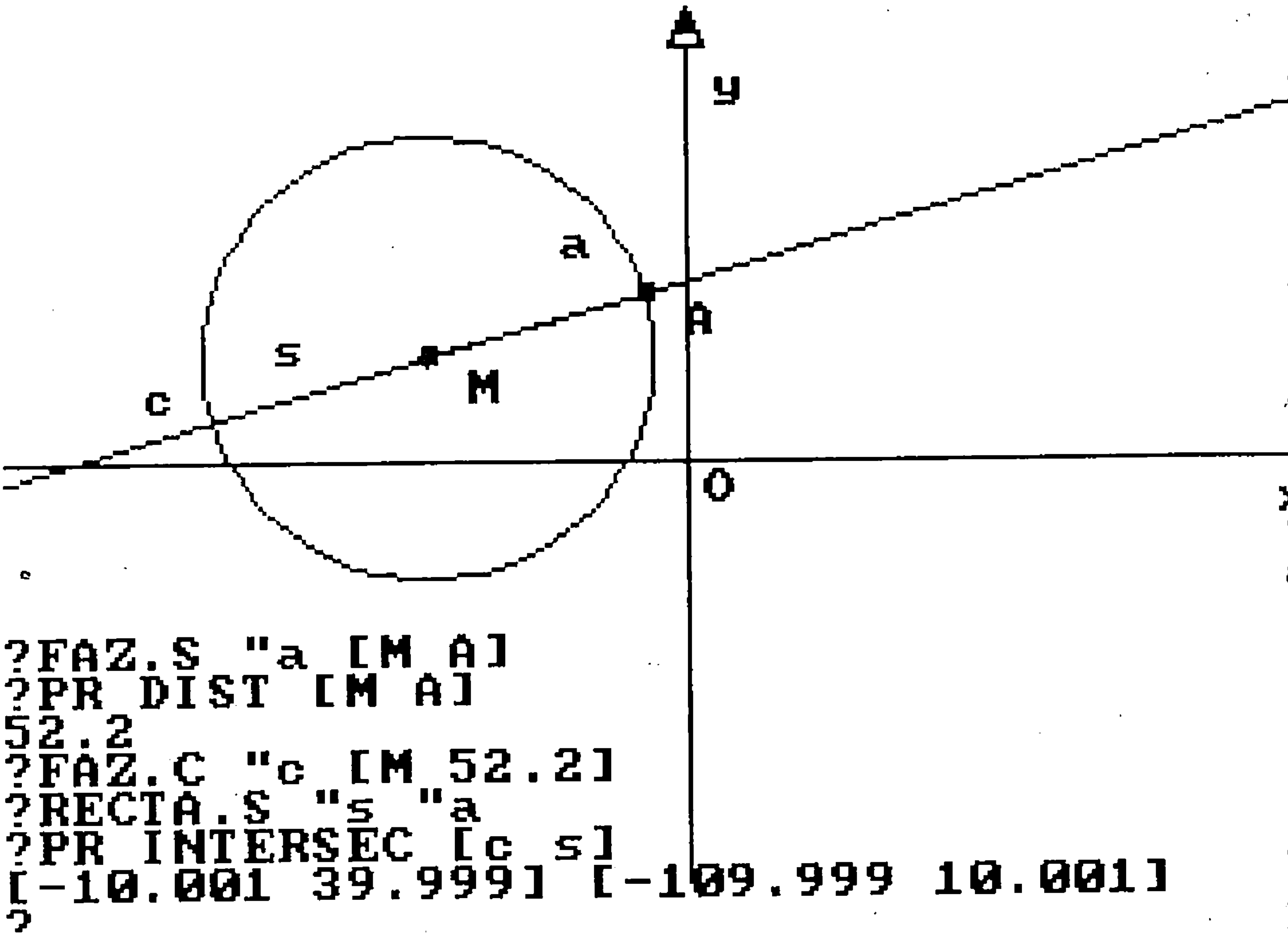
As coordenadas dos pontos A e B são tais que se os quisesse-

FIGURA 10



Legenda 10: As coordenadas pedidas do ponto extremo B foram obtidas por via vectorial (GI6,ACT3.4).

FIGURA 11



Legenda 11: As coordenadas do ponto pedido foram encontradas através da intersecção da circunferência centrada no ponto médio do segmento de recta [AB] e de raio $\overline{MA}$ com a recta suporte de [AB] (GI6,ACT3.4).

mos construir com o LOGO.GEOMETRIA eles apareceriam sobrepostos no "écran" do monitor. Os alunos, quando propuseram este exercício não estavam, por certo, a pensar resolvê-lo com o computador. Um dos problemas apresentados pelos alunos da turma de Informática foi o seguinte:

> "Constrói um segmento de recta com os pontos A(20,80) e B(-50,60) como extremos. Sabendo que um ponto C está situado na recta que passa pelos pontos A e B e que a distância de C a B é igual à distância de A ao ponto médio de [AB], constrói o ponto C, não esquecendo de indicar as suas coordenadas"(GI1).

A resolução apresentada pelos alunos foi esta:

```
" FAZ.S "a [A B]
  RECTA.S "r "a
  PR COORD.P.MED "a
  VECTOR.P  "g [B M]
  PROD.K.V    "p    -1    "g   ,   que   é   o   vector
  cuja extremidade é o ponto C pedido".
```

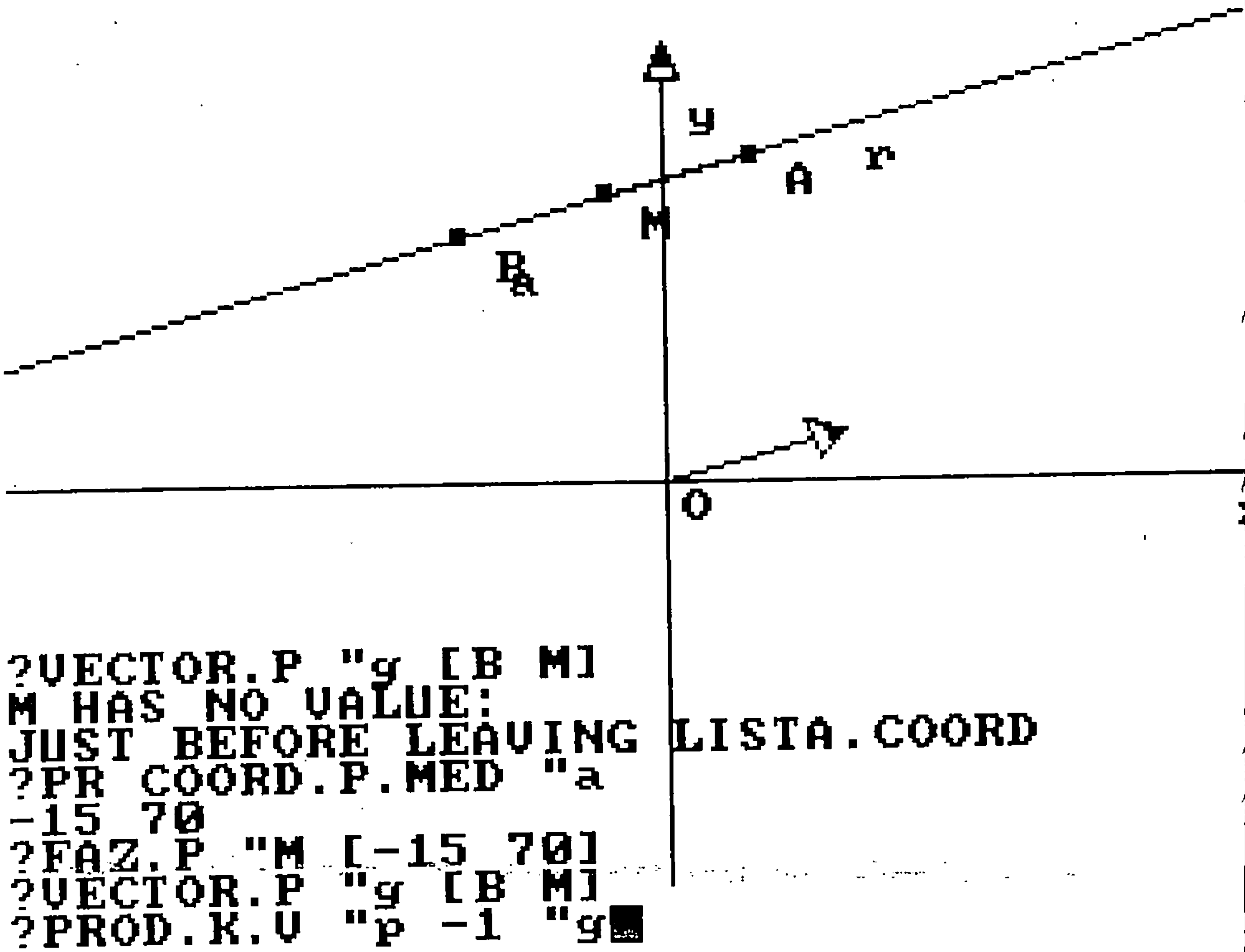
Os alunos, para além de terem excluído, como solução, o ponto C que coincidisse com o ponto médio, apresentaram, como resposta, um ponto C que não satisfaz as condições do enunciado. Eles esqueceram-se que o LOGO.GEOMETRIA só constrói vectores livres (através dos seus representantes aplicados em O). Deste modo, o ponto C pedido não é o ponto extremidade do vector $\vec{p} = -\vec{g} = \overrightarrow{MB}$, mas sim o ponto soma de B com $\vec{p}$ (ver figura 12).

Esta falha deve-se, por certo, ao facto dos alunos não terem tido tempo para testarem a sua resolução no computador (esta actividade foi a última a resolver na aula).

Nestas aulas notou-se, de forma clara, que os grupos seguiram o seu próprio ritmo de trabalho. Alguns deles não conseguiram ter tempo para resolver a 4ª actividade.

Foi bastante gratificante observar a satisfação, o empenho e

FIGURA 12



Legenda 12: O ponto encontrado pelos alunos não satisfaz as condições do enunciado. Houve um certo desencontro final entre a resolução geométrica sem e com o LOGO.GEOMETRIA (GI1,ACT4.4).

a determinação dos alunos na formulação do seu problema. O entusiasmo foi enorme. Pena foi que nem todos os grupos tivessem tido tempo para o formularem na aula.

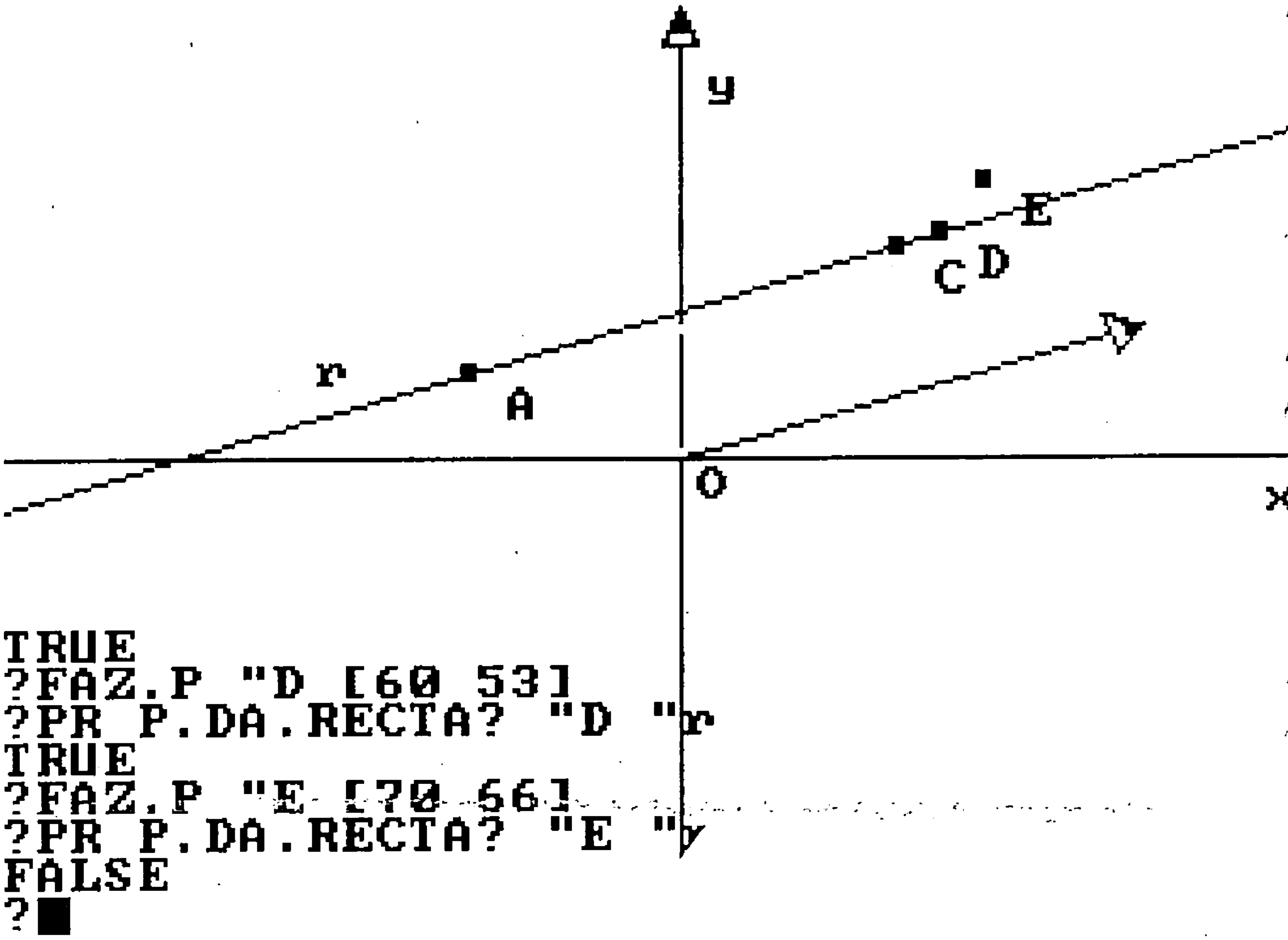
<u>Nota:</u> Só os alunos da turma de Informática é que resolveram as Fichas Nº 5/6/7/8.

<u>A Aula da Resolução da Ficha de Trabalho Nº 5</u>

<u>Actividade 1</u>

Esta actividade iria iniciar os alunos no estudo da recta. Pretendia-se que eles chegassem o mais perto possível da equação vectorial da recta. Todos os grupos a resolveram. Houve uma grande tendência, por parte dos alunos, em começar por construir a recta r e só depois é que procuraram os cinco pontos pedidos. Para tal, recorreram ao procrdimento P.RECTA, que constrói pontos de uma recta ao acaso. Esta "batota" pode ser explicada como uma tentativa de ganhar tempo para arranjarem uma boa estratégia para a resolução da actividade. Na realidade, tratava-se duma situação nova para os alunos e o enunciado do problema era bastante aberto, dificultando uma solução imediata. Gostaríamos de realçar parte do trabalho original desenvolvido por um dos grupos (GI1). Estes alunos começaram por construir (ver figura 13) o ponto A(-50,20) e o vector $\vec{u}(100,30)$. Em seguida construíram o ponto C(-50+100, 20+30) e depois a recta r. Verificaram que o ponto pertencia à recta (P.DA.RECTA? "A "r). Em seguida construíram o ponto D(50+10,50+3) e verificaram que este ponto também pertencia à recta r. A pergunta do investigador "porque é que esse ponto

FIGURA 13



Legenda 13: Os pontos pedidos foram construidos a partir do conceito de declive, matéria ainda "não dada pelo professor nas aulas". Os alunos verificaram, também, que os pontos assim construidos pertenciam à recta (GI1,ACTI.5).

pertence à recta?", os alunos responderam do seguinte modo "Ora veja, somámos 10 à abcissa de C e 3 à sua ordenada, obtendo assim o ponto D". "Então arranjem-me um outro ponto da recta", tornou o investigador. Os alunos fizeram os seus cálculos e consideraram o ponto E(70,66). Mas, e para seu espanto, o ponto E não pertencia à recta. "Devia pertencer!", disseram os alunos. "Bom, discutam entre vocês porque é que o ponto C pertence à recta e porque é que o ponto E não pertence". Estes alunos acabaram por encontrar a justificação para os factos (o professor participou e dinamizou a discussão entre e com os alunos) -- as coordenadas do ponto C afinal eram as coordenadas do vector soma de $\overrightarrow{OB}$ (em que B era o ponto extremidade do vector $\vec{u}$) com o vector $\overrightarrow{OA}$. O "problema" do ponto E estava pura e simplesmente num erro de cálculo. As suas coordenadas eram (70,56) e não (70,66).

Inicialmente os alunos socorreram-se da sua intuição geométrica,

> "acrescentam-se tantas unidades à abcissa de A e tantas unidades à sua ordenada de acordo com a proporção existente nas coordenadas de $\vec{u}$",

afirmaram os alunos. Note-se que a noção de declive de uma recta ainda não fora introduzida, aos alunos, nas aulas. Houve, de facto, uma antecipação a conteúdos programáticos, que pôde existir graças à actividade proposta e à presença do LOGO.GEOMETRIA.

É o computador a tornar certos conceitos mais reais? Um aspecto, também, muito interessante foi o destes alunos se terem virado para o investigador com um ar vitorioso e comentarem,

> "Afinal o nosso raciocínio estava correcto, nós é que nos tínhamos enganado nas contas".

Tinham sido eles quem construira os pontos e tinham sido eles quem encontrara a estratégia seguindo a sua intuição e a sua sensibilidade geométrica. A resposta negativa do computador, e na presença do investigador, não os levou a desistir, antes pelo contrário, reanalisaram o que haviam feito, reviram todo o processo que tinham seguido e encontraram o erro de cálculo (se bem que tenham tido apoio por parte do professor).

Estes acontecimentos são, quanto a nós, um indicador claro que os alunos quando envolvidos com e no trabalho não desistem à primeira dificuldade que lhes aparece.

O professor da turma, na discussão havida com estes alunos permitiu-lhes que vissem que o que eles tinham feito (correctamente e com base na sua intuição geométrica) acabava por ser, também, a soma de um ponto da recta (no primeiro caso o ponto A, no segundo o ponto C) com um vector colinear com $\vec{u}$ -- por exemplo, o ponto D(50+10,50+3) = (50,50) + (10,3), em que (50,50) são as coordenadas do ponto C e (10,3) são as coordenadas de um vector $\vec{v} = (1/10)\vec{u}$).

De todo este processo (o que os alunos fizeram inicialmente, as observações do investigador e a discussão havida no grupo e com o professor) apenas foi escrito no relatório feito por estes alunos o que se poderá considerar como a resposta ideal para eles -- cada ponto da recta resulta da soma de A com um vector colinear com $\vec{u}$. Pedia-se um relatório completo onde fosse escrito tudo o que se passara na resolução de cada actividade, porém, isso nem sempre aconteceu. Porquê? Falta de tempo? Falta de hábito de comunicar Matemática e em linguagem Matemática?

Pensamos que a igualdade $P = A + k\vec{u}$ com $k \in \mathbb{R}$, tem um significado bastante claro para estes alunos -- não se tratará apenas de mais uma fórmula. Eles senti-la-ão, decerto, pois foram eles que de certa maneira a construíram. Ela pertence-lhes, é deles.

Mais uma vez se verificou, por esta aula, que mesmo trabalhando com o computador, o papel do professor é fundamental, é insubstituível. Dos momentos mais ricos, de maior produtividade, constam os que estão ligados aos grupos onde as dificuldades foram explicitadas e ultrapassadas com alguma ajuda do professor e onde foi estabelecido um diálogo vivo entre o professor e os elementos dos grupos. Este saldo favorável, deve-se não só ao reforço positivo que acaba por ser a atenção dada pelo professor com a sua presença e ajuda em desbloquear certas situações, mas também, e principalmente, às questões que são levantadas nas discussões estabelecidas. Estas, de algum modo vão respondendo a perguntas feitas pelos alunos e ao mesmo tempo vão levantando novos problemas, motivando a curiosidade intelectual dos alunos e levando-os a um empenhamento no trabalho, cada vez maior.

Na resolução desta actividade foram seguidos, essencialmente, dois caminhos. Um deles consistiu na soma do ponto dado A com vectores colineares com $\vec{u}$. O outro, embora consistindo na soma de um ponto com vectores colineares com $\vec{u}$, não considerou exclusivamente o ponto A. Ao ponto soma de A com um vector colinear com $\vec{u}$ somaram um vector colinear com $\vec{u}$ e assim sucessivamente. Alguns dos alunos que seguiram o primeiro caminho acabaram por intuir e ver a equação vectorial da recta -- o que aconteceu com dois grupos.

Mais uma vez se chama a atenção para o facto dos relatórios terem sido escritos na própria aula, não dando aos alunos muito tempo para os relerem de modo a poderem alterar e melhorar o que haviam escrito.

Continuam a ser os alunos a "traçar" as rectas e não o computador. A relação com o LOGO.GEOMETRIA é boa, pois os alunos "perguntaram ao LOGO.GEOMETRIA se os pontos traçados pertenciam ou não à recta e ele respondeu que sim". Este facto significa que há confiança no computador e no programa.

Três grupos houve que não escreveram no relatório que tinham verificado que os pontos que iam encontrando pertenciam à recta. Aliás, este é um dos aspectos que ainda continua a caracterizar muito a prática destes alunos -- crença muito grande na imagem, crença na evidência das figuras geométricas.

Actividade 2

Se o papel para a adição de vectores pode estar relacionado com a forma como as quantidades que eles possam representar se comportam, como pensar a multiplicação de vectores? Como apresentar aos alunos o produto escalar de dois vectores sem recorrer ao trabalho feito por uma força quando move o seu ponto de aplicação segundo uma distância d? O caminho que tem sido seguido nas nossas escolas é o da definição pura e simples. O produto interno de dois vectores torna-se, assim, árido e abstracto para alunos deste nível etário e com esta experiência académica.

O problema formulado nesta actividade pretendia ser um exemplo de uma potencial aplicação do produto interno de dois vectores, cuja definição já tinha sido introduzida em aulas anteriores. Não se pedia aos alunos que construissem a figura geométrica apresentada no enunciado (alguns fizeram essa pergunta) e ao computador apenas foi atribuída a função de fazedor de cálculos.

Os alunos resolveram-no através de dois processos muito parecidos. Um deles é indicado no seguinte relatório:

$$
\begin{aligned}
&" \quad \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\ (\hat{\vec{u},\vec{v}})\\
&\vec{AB}.\vec{AC} = \|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|.\cos\ (\hat{\vec{AB},\vec{AC}})\\
&900 = 60.\|\vec{AB}\|.\cos\ (\hat{\vec{AB},\vec{AC}})\\
&900/60 = \|\vec{AB}\|.\underbrace{\cos\ (\hat{\vec{AB},\vec{AC}})}_{\|\vec{AB}\|/60}\\
&\|\vec{AB}\| = 30\\
&\text{Pelo teorema de Pitágoras}\\
&\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2\\
&\|\vec{BC}\| = 30\sqrt{3}\\
&A = (30\sqrt{3}\ .\ 30)/2 = 450\sqrt{3}\\
&\sqrt{3} \simeq 1.7\\
&A = 765\\
&\text{Preço total} \quad 1530000\$00 \qquad "\text{(GI3)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
2700 & 2\\
1350 & 2\\
675 & 3\\
225 & 3\\
75 & 3\\
25 & 5\\
5 & 5\\
1 &
\end{array}
$$

Nesta resolução os alunos optaram pela aproximação de 1.7 para $\sqrt{3}$, mostrando-se independentes e responsáveis.

No outro processo foi utilizada a projecção ortogonal de um vector sobre outro. Este caminho pode ver-se no extracto do seguinte relatório:

$$
\begin{aligned}
&" \quad \vec{AB}.\vec{AC} = \|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|.\cos\ (\hat{\vec{AB},\vec{AC}})\\
&900 = \|\vec{AB}\|.\underbrace{\underbrace{60.\cos\ (\hat{\vec{AB},\vec{AC}})}_{\text{proj}_{\vec{AB}}.\vec{AC}}}_{\|\vec{AB}\|}\\
&30 = \|\vec{AB}\| \qquad \ldots"\text{(GI4)}.
\end{aligned}
$$

Actividade 3

Até à data da feitura desta actividade, a única aplicação do produto interno de dois vectores que os alunos tinham tido foi a que se relacionou com a resolução da actividade 2 desta ficha de trabalho. Deste modo não será de estranhar que apenas metade dos grupos tenha incluído o produto interno de vectores nos enunciados por eles formulados. Alguns deles baseavam-se na actividade 2 como se pode constatar pelo seguinte enunciado:

> " Sabendo que $\vec{AB}.\vec{AC} = 1600$, calcula a área do rectângulo [ABCD] (ver figura 14)"(GI1).

Houve um grupo que não respondeu à pergunta, um outro formulou um exercício muito elementar e houve mesmo quem enunciasse um exercício do tipo "complicado", onde o que interessava era somar e subtrair coordenadas, independentemente do que elas pudessem significar:

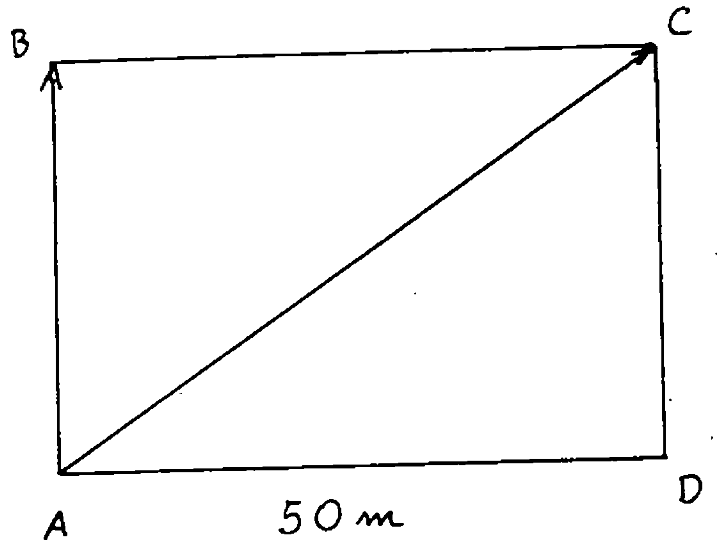
> "Considere num ref.o.n. os pontos M(10,30), N(40,20), O(-50,50) e o vector $\vec{p}(-20,-10)$. a) Determine o ponto P de modo que $P - M + N = -2\vec{p}$ ... "(GI2).

Noutros problemas foi levado em conta o LOGO.GEOMETRIA e vários conceitos matemáticos trabalhados antes, como, por exemplo, as transformações de semelhança e o versor de um vector. Um dos enunciados foi o seguinte:

> "Numa base o.n. constrói os pontos A(30,50), C(30,-50), D(10,0) e B(50,0). Une todos os pontos e verifica que se trata de um losango (sem recorrer ao comando DIST). Faz um losango semelhante a partir do ponto A. Verifica se os pontos C,A,C' e A' são colineares e justifica. Determina a norma do vector $\vec{CA}$. Determina o versor de $\vec{CA}$"(GI4).

A restrição que os alunos impuseram quanto à utilização do "comando DIST" é bastante curiosa e intencional pretendendo, por certo, que o cálculo de $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ seja feito à custa da norma de vectores -- obrigam a trabalhar com vectores. A formulação do pedido de "um losango semelhante a partir de A", está pouco clara mas, pela resolução apresentada, o que os alunos

FIGURA 14



Legenda 14: Trata-se de um problema semelhante ao da actividade anterior (GI1,ACT3.5).

pretendem é uma simetria axial do losango em que o eixo de simetria é a recta perpendicular ao eixo dos yy e que passa por A. A pergunta sobre a colinearidade dos quatro pontos A, A', C e C' é bastante aberta, pois permite várias vias de resolução (geométrica, vectorial e analítica). A exigência da justificação é, quanto a nós, um dos aspectos mais ricos deste enunciado. A justificação obriga à explicitação do que se fez, obriga à reflexão sobre o que se fez, obriga ao rigor e à perfeição.

Notou-se uma certa incorporação cultural na formulação dos problemas. Num dos grupos, em certa altura, sobressaiu a seguinte frase, "Um agricultor quer construir uma pocilga,...".

O empenho no trabalho foi de tal modo grande que alguns alunos saíram da sala de aula um pouco aborrecidos porque não tinham tido tempo para formularem e resolverem o seu problema como eles queriam. Constatou-se ter sido correcta a reformulação de dois dos grupos, pois isso levou-os a ficar mais operacionais. Dois alunos que andavam a ficar menos activos regressaram ao trabalho e à participação.

A Aula da Resolução da Ficha de Trabalho No 6

Esta ficha de trabalho acabou por se revelar demasiado extensa -- apenas um grupo a resolveu na sua totalidade, embora com alguns relatórios um pouco incompletos. Houve, aquando da sua elaboração, consciência de que tal facto pudesse vir a acontecer. A sua manutenção deveu-se ao firme propósito de cumprimento do programa curricular e, ainda, por se trabalhar com o computador apenas duas horas por semana e em dia certo. Deste modo, a ficha de trabalho da sessão seguinte com computador (ficha 7) já não poderia abordar, com a perspectiva de descoberta de relações, as condições de paralelismo e de concorrência de duas rectas dadas pelas suas equações gerais.

Actividade 1

Todos os grupos explicitaram a descoberta da relação em em causa. Uns relataram-na de forma sintética e um pouco árida,

> "Depois de fazermos o que nos foi pedido pudemos tirar uma conclusão muito importante: o quociente da ordenada pela abcissa é igual ao declive"(GI8),

em que só pelo relatório da actividade 2 confirmámos que esta ordenada e esta abcissa eram referentes a um vector director da recta. Outros grupos fizeram um relato mais claro e esclarecedor do caminho seguido:

> "Começámos por chamar o ficheiro GVA e de seguida o módulo GEOMVECT. Construímos, como pedido, a recta r a partir da equação geral através de FAZ.R.EQG "r [2 -5 200]. Construímos de seguida um seu vector director e pedimos as suas coordenadas através de ESC.COORD.V. Pedimos o declive da recta, que era 0.4 (número igual a -40/(-100) que eram as coordenadas do vector director com y/x, ou seja, a ordenada a dividir pela abcissa)"(GI4).

Parte dos grupos satisfez-se com a descoberta desta relação para o caso concreto apresentado no enunciado. Outros, para além da recta dada, consideraram novas situações e estabeleceram a relação com base numa maior experimentação. Houve grupos que a partir do caso apresentado avançaram de imediato para uma relação (note-se que os valores encontrados eram fáceis de relacionar, 0,4 = -40/(-100)), mas sentiram necessidade de a testarem.

Para tal, recorreram ao construtor de rectas ao acaso (R.ACASO). O facto da relação ainda se continuar a manter deu-lhes quase a força de uma demonstração -- embora não tivessem feito (nem podiam) a verificação para todos os casos fizeram-na para um caso ao acaso, aleatório, um qualquer. Esta situação é transmitida no seguinte relatório:

> "... Para nos certificarmos que era assim para qualquer recta construímos uma recta ao acaso e procedemos do mesmo modo para relacionar o declive da recta com as coordenadas do vector director, o que também nos deu igual"(GI1).

Esta generalização já é diferente da que era feita no início dos trabalhos. Os alunos já generalizam com uma maior fundamentação.

O maior obstáculo à resolução desta actividade foi a confusão, por parte dos alunos, entre os procedimentos CONTEUDO "u e ESC.COORD.V "u - só o segundo é que nos dá as coordenadas do vector. Um dos grupos começou por considerar o vector director da recta $\vec{u}(5,2)$ (recorrendo aos seus conhecimentos da equação geral da recta) mas não conseguia relacionar as coordenadas deste vector com o par ordenado que lhes dava o LOGO.GEOMETRIA através do procedimento CONTEUDO "v (v era o vector director da recta dado pelo LOGO.GEOMETRIA). No caso, PR CONTEUDO "v dava como resultado o par ordenado (201.8,107.7).. Os alunos estavam baralhados. Por um lado acreditavam no vector tirado, por eles, da equação da recta, por outro, também acreditavam nos dados do computador. Pediram ajuda ao professor. Acabaram por teclar ESC.COORD.V "v e obtiveram o par ordenado (-100, -40). Como $\vec{u} = (5,2) = (-1/20)\vec{v}$ os alunos ficaram mais satisfeitos e avançaram para o declive da recta e para a descoberta da relação que se pretendia.

Num outro grupo, os alunos partiram do vector director da recta $\vec{u}(5,2)$ e passaram a considerar o vector director $\vec{v}(50,20) = 10\,\vec{u}$ de modo a poderem visualizá-lo no "écran" do monitor. Estes alunos, para além de mostrar que compreenderam a noção de vector director de uma recta, revelaram uma familiarização bastante grande com o computador e com as caracteristicas do LOGO.GEOMETRIA.

Actividade 2

Os relatórios obtidos foram bastante bons. Todos os alunos explicitaram a relação de igualdade entre os declives das três rectas paralelas. Um dos grupos justificou a igualdade com base na igualdade das coordenadas dos três vectores directores, um de cada recta, que o LOGO.GEOMETRIA lhe deu (o LOGO.GEOMETRIA através do ficheiro GVA, dá o mesmo vector director para cada familia de rectas paralelas). Este grupo de alunos não chamou a atenção para o caso dos três vectores directores serem distintos.

Um outro grupo justificou a relação de igualdade do seguinte modo:

> "... pois se as rectas são paralelas formam o mesmo ângulo entre si (0º) e com quaisquer outras rectas (caso do eixo das abcissas)." (GI3).

É óbvia esta justificação: a mesma inclinação, logo o mesmo declive. Estes alunos revelam ter uma noção clara de declive de uma recta. Outros alunos deram justificações idênticas, porém, a grande maioria dos grupos recorreu à relação obtida na actividade 1, como se pode observar no seguinte relatório:

> "...fomos construir três rectas paralelas entre si com o procedimento R.ACASO "r para a primeira recta e PARAL "s "r [100 50], PARAL "t "r [0 0] para as outras duas. Depois disto fomos perguntar ao computador quais os seus declives e ele deu-nos para todos o mesmo valor. Daí concluímos que as rectas paralelas entre si têm sempre o mesmo declive porque têm a mesma inclinação. Um exemplo disto é se considerarmos um vector director de uma das rectas e dividirmos a sua ordenada pela sua abcissa vai dar o declive da recta e como o vector de uma das 3 rectas paralelas é o mesmo para as outras duas ou pelo menos é um vector colinear desse, podemos concluir que a divisão da ordenada pela abcissa terá de dar o mesmo valor"(GI5).

Estes alunos recorreram ao construtor R.ACASO, dando uma generalidade maior ao exemplo com que eles trabalharam, denotaram ter interiorizado a noção de vector director de uma recta e a de vectores colineares e mostraram ter confiança no computador. Aliás, a noção de vector director de uma recta bem como a noção de vectores colineares parecem estar claras para um grande número de alunos, confiando, claro, em relatos, entre outros, como este:

> "... mesmo que o computador nos desse três vectores directores diferentes eles seriam colineares de certeza, pois as rectas r, s e t são paralelas e então a divisão das ordenadas pelas respectivas abcissas dar-nos-iam o mesmo valor"(GI1),

Em vários relatórios encontramos indicadores que revelam a existência de um bom ambiente e de uma boa disposição no trabalho. Disto é exemplo o relato deste mesmo grupo:

> "... para justificar fizemos para todas elas um vector director que por (talvez) preguiça do computador, deu-nos um valor idêntico para as três rectas...".

Actividade 3

Todos os grupos chegaram à relação desejada, embora três deles não a tivessem generalizado. O grupo GI1 teve um pequeno problema com o LOGO.GEOMETRIA como se pode ver pelo relatório apresentado:

> "Começámos por fazer uma recta r ao acaso e um ponto E(60,40) e fizemos uma recta g perpendicular a r. Calculámos o declive das duas rectas, -0,489 e 2,041. Depois multiplicámos um pelo outro dando-nos o valor -0,99... e não conseguimos concluir nada. Considerámos -0,4897859184 em vez de -0,489 e o valor 2,041666667 em vez de 2,041 e multiplicámos um pelo outro e deu-nos -1. Fizemos o mesmo para outras duas rectas perpendiculares e obtivemos -1..."(GI1).

O LOGO.GEOMETRIA dá-nos o declive de uma recta através de um valor aproximado, em muitos casos, com dez casas decimais, ficando ao critério do utilizador o tipo de arredondamento a fazer. Fraqueza do programa? pensamos que não. Este grupo de alunos em vez de arredondar os valores obtidos fez uma truncadura. Se os alunos tivessem feito um arredondamento, bastava com um erro inferior a 0,001, o produto que calcularam teria sido um número mais "simpático" (do tipo -1,0005).

Nota-se, nos relatórios referentes a esta actividade, mais preocupação com a experimentação. Mesmo a própria generalização já é feita com mais cautela.

> "O produto é igual a -1. Voltámos a fazer duas rectas perpendiculares e obtivemos -1. Mas não podemos concluir se dará para todos os casos"(GI6).

Das duas demonstrações apresentadas gostaríamos de destacar uma que apresenta uma certa originalidade:

"Vimos que $m.m'=-1$.
Para demonstrar temos $r \perp s$, $y = mx + b$ e $y = m'x + b'$. Passámos estas equações reduzidas para as equações gerais e ficou $mx - y + b = 0$ e $m'x - y + b' = 0$. Determinámos os seus vectores directores e vem que são paralelos à sua recta, $\vec{u} \,//\, r$ e $\vec{v} \,//\, s$ portanto, se são paralelos às rectas e se as rectas são perpendiculares entre si, também os vectores são perpendiculares, $\vec{u} \perp \vec{v}$. $\vec{u}\,(1,m)$ e $\vec{v}\,(1,m')$ portanto $\vec{u}.\vec{v} = 0$ $\Leftrightarrow (1,m).(1,m') = 0 \Leftrightarrow 1 + m.m' = 0$ $\Leftrightarrow m.m' = -1$ "(GI4).

Não é difícil, para nós, afirmar que estes alunos sentiram mesmo o que escreveram. Eles viveram a demonstração e fizeram-na sua, "... Determinámos os seus vectores directores, ...".

A Aula da Resolução da Ficha de Trabalho No 7

Esta ficha foi trabalhada numa semana de testes escritos em várias disciplinas. Estas provas eram decisivas para muitos dos alunos. Muitos deles andavam bastante cansados e saturados.

Actividade 1

A determinação do ângulo de duas rectas (o menor dos ângulos que elas determinam no plano) faz parte do conteúdo programático do 10º ano de escolaridade. Como é que os alunos procederiam para o calcular sem o recurso a uma fórmula? Como utilizariam os seus conhecimentos?

"Não temos um transferidor!", afirmaram alguns alunos, denunciando, deste modo, algumas das dificuldades que estavam a sentir para resolver a actividade 1. Aliás, os alunos sentiram mais dificuldades do que as que se esperava que eles sentissem. A pergunta era bastante aberta o que talvez tenha dificultado a descoberta de estratégias para a sua resolução. Demorou, mesmo, algum tempo desde o início da aula até que os alunos começassem a aplicar os seus conhecimentos sobre vectores.

Utilizar uma fórmula é uma coisa mais ou menos fácil, mas construí-la, ou construir algo que desempenhe as mesmas funções que ela, já é um pouco mais complicado. Os alunos mostraram-se, ao princípio, um pouco impotentes, incapazes de resolver a situação. O caminho mais seguido pelos alunos foi o do produto interno de dois vectores directores das rectas. Um outro, geométrico, baseado nos declives das rectas, foi também esboçado, embora como alternativa ao primeiro e com pouca clareza.

Exemplicativo do caminho mais utilizado é o relatório que a seguir transcrevemos:

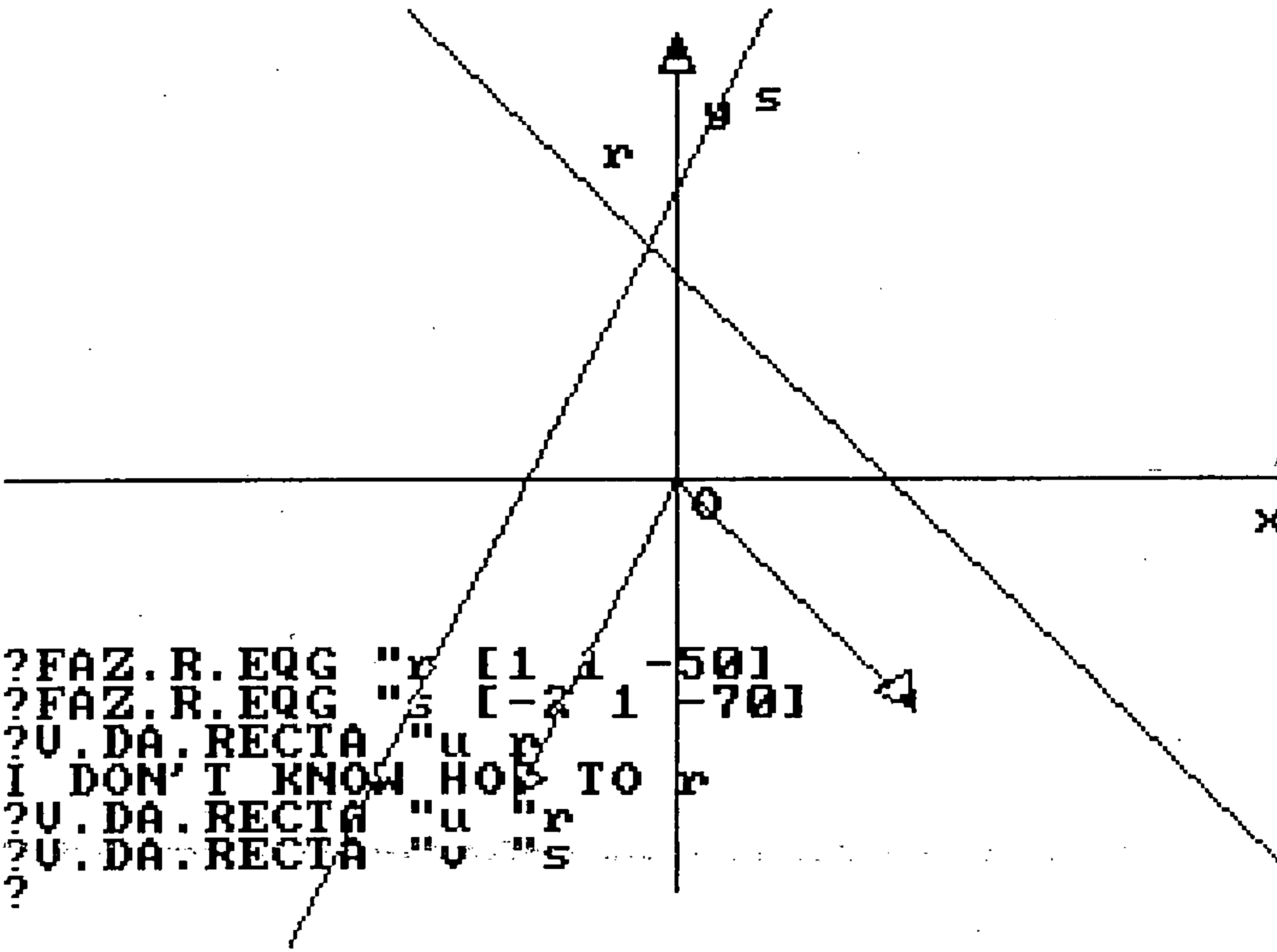
> "Começámos por desenhar as rectas a partir das suas equações. De seguida desenhámos os seus vectores directores através dos comandos existentes. Calculámos o produto interno dos dois vectores directores, $\vec{u}.\vec{v} = 1749,95$. De seguida calculámos as normas de cada um deles $\|\vec{u}\| = 70,71$ e $\|\vec{v}\| = 78,26$. Tirando o valor de $\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = (\vec{u}.\vec{v}) \;/\; (\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|)$ veio o valor de $\cos(\vec{u}\hat{,}\vec{v}) = 0,3162313771$. Devido a não termos nenhuma tabela de cosenos não concluímos o exercicio como era pretendido (ver figura 15)"(GI3).

Exemplificativo da segunda via é o que a seguir se transcreve:

> "...calculávamos o declive das rectas e assim calculávamos os ângulos que as rectas fazem com o eixo dos xx logo, achávamos o ângulo das rectas"(GI8).

Fica a dúvida se os alunos eram ou não capazes de calcular o ângulo pedido. Se sim, porque o não calcularam? Terá tido a ver com a necessidade de recorrer à função arctn, tarefa para a

FIGURA 15



Legenda 15: O cálculo da medida da amplitude do ângulo das duas rectas foi obtido através do produto interno de dois vectores directores das rectas (GI3,ACT1.7).

qual não se sentiram capazes de executar?

Tal como se pode observar no primeiro relatório atrás transcrito, os alunos terminaram a sua actuação com a frase "Devido a não termos nenhuma tabela de cosenos não concluimos o exercicio ...". Este obstáculo, porém, não impossibilitou um outro grupo de concluir a resolução da actividade:

> "... em seguida calculámos o coseno do ângulo formado pelos vectores directores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o resultado foi 0,3162. Para verificarmos se estava certo pedimos ao computador o valor de cos 71,565 (o valor 71,565 foi-nos dado pelo comando ANG.V "u "v) e deu-nos o resultado 0,3162. Como verificámos o nosso resultado estava certo"(GI1).

O LOGO.GEOMETRIA embora não permitisse, aos alunos, o cálculo do arc cos 0,3612 (recorde-se que com o LOGO.GEOMETRIA só podemos calcular directamente os valores referentes a COS, SIN E ARCTN) permitiu-lhes tornear o problema de uma forma inteligente e imaginativa.

Esta actividade acabou por ser explorada de uma forma um pouco incompleta (não se abordaram, claramente, os dois casos possiveis do ângulo a dos dois vectores directores, $0^{o}<a<90^{o}$ e $90^{o}<a<180^{o}$, que tinha consequências no sinal do resultado). Isso deveu-se ao muito tempo que os alunos demoraram para estabelecer uma estratégia para a resolver. Esse facto acabou por provocar o aparecimento de uma tendência para passar à actividade seguinte o mais depressa possivel.

A aula seguinte, sem o computador, foi "viva e rentável", afirmou o professor mais tarde.

> "O caso em que o ângulo dos dois vectores directores, um de cada uma das rectas, está compreendido entre 90° e 180°, foi analisado com uma certa facilidade por parte dos alunos. O módulo que aparece na fórmula utilizada para o cálculo do ângulo de duas rectas não se apresentou a estes alunos como algo de transcendente, de mágico",

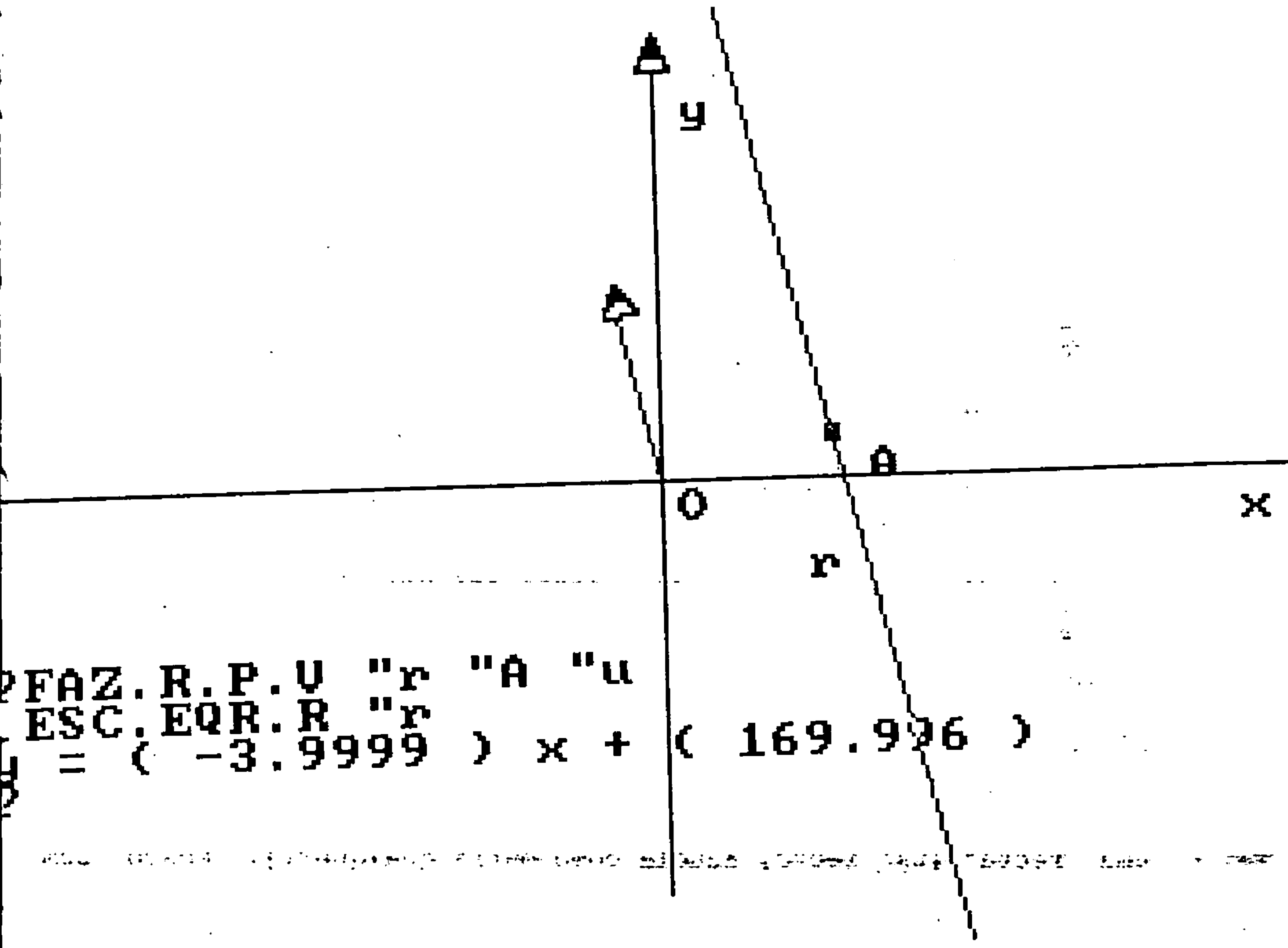
disse, ainda, o professor.

<u>Actividade 2</u>

> "Começámos por desenhar o ponto A. Como tinhamos concluído numa das actividades anteriores o declive de uma recta era-nos dado pelo quociente da ordenada pela abcissa (coordenadas do vector director), concluímos, portanto, que as coordenadas do vector director da recta s tinham que ser tais que o quociente da ordenada pela abcissa fosse igual a -4 (isto é, igual ao declive). Traçámos o vector director $\vec{u}$ a partir das coordenadas (-10,40), e em seguida traçámos uma recta passando pelo ponto A com a direcção de $\vec{u}$. Pedimos de seguida a equação reduzida da recta, y=(-4)x + 170, verificando que o declive era o referido -4 (ver figura 16)" (GI3).

Os alunos que fizeram este relatório não deixam claro se o vector (-10, 40) era ou não o único que se podia considerar. Eles utilizam o artigo definido "o" para o vector " Traçámos o vector director" (<u>o</u> vector, aquele e mais nenhum?), enquanto que utilizam o artigo indefinido "uma" para a recta "e em seguida traçámos uma recta" (<u>uma</u> recta, aquela como outra qualquer?). Mesmo com esta dúvida suscitada pela comunicação escrita achamos este relatório muito rico. Estes alunos, para além de resolverem o problema, sentiram necessidade de ir confirmar os resultados que estavam a obter. Não lhes bastou a visualização do "écran" do monitor do computador, nem a confiança no que estavam a fazer. Isto é, quanto a nós, revelador de uma atitude crítica e re-

FIGURA 16



Legenda 16: A partir das coordenadas do vector director da recta os alunos calcularam o declive e adaptaram-no às características do LOGO.GEOMETRIA.

flexiva, duma atitude de emancipação da visualização geométrica (necessária mas não suficiente), sinónimo de um certo amadurecimento do seu espírito matemático.

A dúvida expressa atrás quanto à falta de clareza relativamente ao número de vectores directores de uma recta foi suscitada, talvez, pela existência do brilhante relatório que a seguir transcrevemos:

> "Como nos era dado o declive da recta nós, a partir dele achámos as coordenadas de um vector director da recta r, pois $\vec{w}$ (p,q) então m = q/p e como m= -4, -4= q/p. Uns valores possíveis para q e p são -40 e 10 respectivamente. Então as coordenadas do vector w são (10,-40). Com estes dados construímos o vector FAZ.V.COORD "w [10 -40]. Depois construímos a recta r que passa pelo ponto A e tem a direcção de w (FAZ.R.P.V "r "A "w)"(GI1).

Os relatórios apresentados mostram-nos que não houve estratégias diferentes de abordagem do problema. Dois grupos consideraram (-1,4) e (2,-8) como os vectores directores da recta, revelando, muito provavelmente, que não resolveram o problema a pensar em utilizar o computador (os vectores não se distinguiriam da origem do referencial). Como que por oposição a estes alunos, um outro grupo e de forma curiosa escreveu o seguinte "... -4 = q/p = -4 / 1 = -8 / 2 = -80 / 20 ...", onde se pode ver, nitidamente, a sua preocupação em adaptar as suas conclusões à uma representação gráfica no computador.

O ambiente de trabalho tem vindo a melhorar à medida que o tempo vai passando. Nesta aula o professor identificou-se de tal maneira com um dos grupos de alunos que todos formaram um todo, uma autêntica equipa. O próprio professor avançou com as coordenadas de um vector director em que as coordenadas estavam trocadas. Ninguém deu conta do facto e, claro, as conclusões não foram satisfatórias. Voltaram ao princípio e detectaram o erro e corrigiram-no. Foi um bloco a resolver um problema, cada um dando a sua opinião para encontrarem o erro. O facto do professor se ter enganado, sem ser de propósito, sem ser a fingir, provocou nos alunos uma sensação de compromisso com o professor, de identificação com ele. As feições dos alunos eram disso reveladoras. O professor foi, durante alguns minutos, um companheiro mais velho na busca duma solução para o problema.

Nesta aula, mais uma vez um grupo de alunos se bateu com todas as suas forças na defesa da sua estratégia num diálogo animado com o professor. Os alunos tinham razão, só que tinham-se enganado a introduzir os dados no computador.

Actividade 3

Só três dos oito grupos apresentaram um relatório desta actividade. A falta de tempo foi o factor principal para tal acontecimento. Os relatórios apresentados são reveladores da experimentação que os alunos fizeram bem como da observação e reflexão sobre o que estavam a ver e a fazer. Um dos relatórios apresentados foi o seguinte:

> "A partir da equação reduzida fizemos a recta dada. Verificámos que a recta tinha de declive 3. Fizemos uma paralela a essa recta que passasse pelo ponto O e verificámos que tinha declive igual a 3. Pedimos a equação reduzida dessa recta e chegámos à conclusão que a fórmula que representa a família das rectas de declive 3 é $y = 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$"(GI1).

Estes alunos revelam já um espírito indutivo apreciável.

Actividade 4

Aos alunos que já tinham resolvido a Actividade 3, e devido ao adiantado da hora, foi sugerido que passassem à resolução da Actividade 5. Foi dada a preferência à formulação de problemas. Apenas um grupo apresentou o relatório referente à actividade 4:

```
" FAZ.P [A B C D][[-10 30][10 80][90 70][70 20]]
  RECTA.S "r [A B]
  RECTA.S "s [B D]              PARAL "t "r "D
  PARAL "u "s "A
       PR P.DA.RECTA? "C "t  ---> True
       PR P.DA.RECTA? "D "u  ---> True
```

São consecutivos pois $\vec{AB}+\vec{BC} = \vec{AC}$ e $\vec{AD}+\vec{DC} = \vec{AC}$"(GI8).

A pergunta PR P.DA.RECTA? "C "t, da qual obtiveram uma resposta afirmativa, é bastante bem feita e indicadora de um certo domínio do LOGO.GEOMETRIA. Estas perguntas feitas ao computador culminaram uma etapa da estratégia que os alunos estabeleceram para a verificação pedida. Uma vez que os quatro pontos dados eram vértices de um paralelogramo havia que verificar que eles eram consecutivos. O recurso à regra do triângulo foi um caminho possível para a verificação que se pedia. Desta resolução podemos inferir, por certo, que estes alunos fizeram Matemática: com vectores e com o computador.

Actividade 5

Quatro grupos não apresentaram o enunciado pedido. Dois grupos enunciaram exercícios do tipo "determinar a equação reduzida da recta r de equação geral 3x + 2y -5 = 0". Um destes grupos utilizou o LOGO.GEOMETRIA.

Um outro grupo apresentou o seguinte enunciado:

> "Dados os pontos A(2,3), B(5,0) e C(8,3) verifique que são vértices do mesmo quadrado. Determine ainda o comprimento da diagonal do quadrado e as coordenadas do 4º vértice"(GI2).

Mais uma vez é formulado um problema para cuja resolução não se necessita do LOGO.GEOMETRIA. Isto não quer dizer que os alunos dispensem a intuição geométrica. Uma tal afirmação era infundada na medida em que a resolução que os alunos apresentaram incluia um desenho exemplificativo da situação. O que aconteceu mais uma vez foi a escassez de tempo que os alunos tiveram para a resolução desta actividade. A parte uma certa falta de rigor num dos pedidos feitos, "Determine o comprimento da diagonal" -- quem o não tem?, este problema revela criatividade, imaginação e conhecimentos sobre vectores e geometria elementar. Note-se a intencionalidade da posição dos três pontos dados (não se trata de um quadrado com os lados paralelos aos eixos coordenados).

Um outro enunciado foi o que a seguir se apresenta:

> "Escolha-se uma recta ao acaso. Por exemplo a recta de equação $x/3 + y/2 = 1$. Escreva a equação geral da recta. A partir desta equação determine a equação da familia das rectas perpendiculares à recta escolhida"(GI1).

A resolução registada pelos alunos foi a seguinte:

> "$x/3 + y/2 = 1 \iff \ldots \iff 2x + 3y - 6 = 0$, equação geral da recta. Assim um vector director da recta escolhida é $\vec{u}(-3,2)$ e um vector perpendicular a $\vec{u}$ é, por exemplo o vector $\vec{v}(2,3)$. Este vector $\vec{v}$ é um vector director de todas as rectas perpendiculares à recta considerada. Assim uma recta perpendicular à recta escolhida é a recta $3x - 2y + 0 = 0$ ou $3x - 2y + 1 = 0$. Finalmente a equação da familia das rectas perpendiculares à escolhida é
> $3x - 2y + k = 0,\ k \in \mathbb{R}$ ".

Os alunos partiram do problema da actividade 3 (que resolveram experimentando para dois casos) e deram-lhe seguimento de forma notável. Revelaram espírito investigativo. Eles experimentaram sem experimentar: não precisaram de o fazer, tal era a convicção e a certeza na sua resolução. Esta, apresentada vectorial e analiticamente não choca nem fere. A forma como ela é feita, com a justificação de todos os passos, com a apresentação de todos os objectos que vão aparecendo "...e um vector perpendicular a $\vec{u}$ é, por exemplo, o vector $\vec{v}(2,3)$" e com a própria indicação das duas rectas exemplos é reveladora da complementação da intuição geométrica num campo mais abstracto e rigoroso.

Aula da Resolução da Ficha de Trabalho No 8

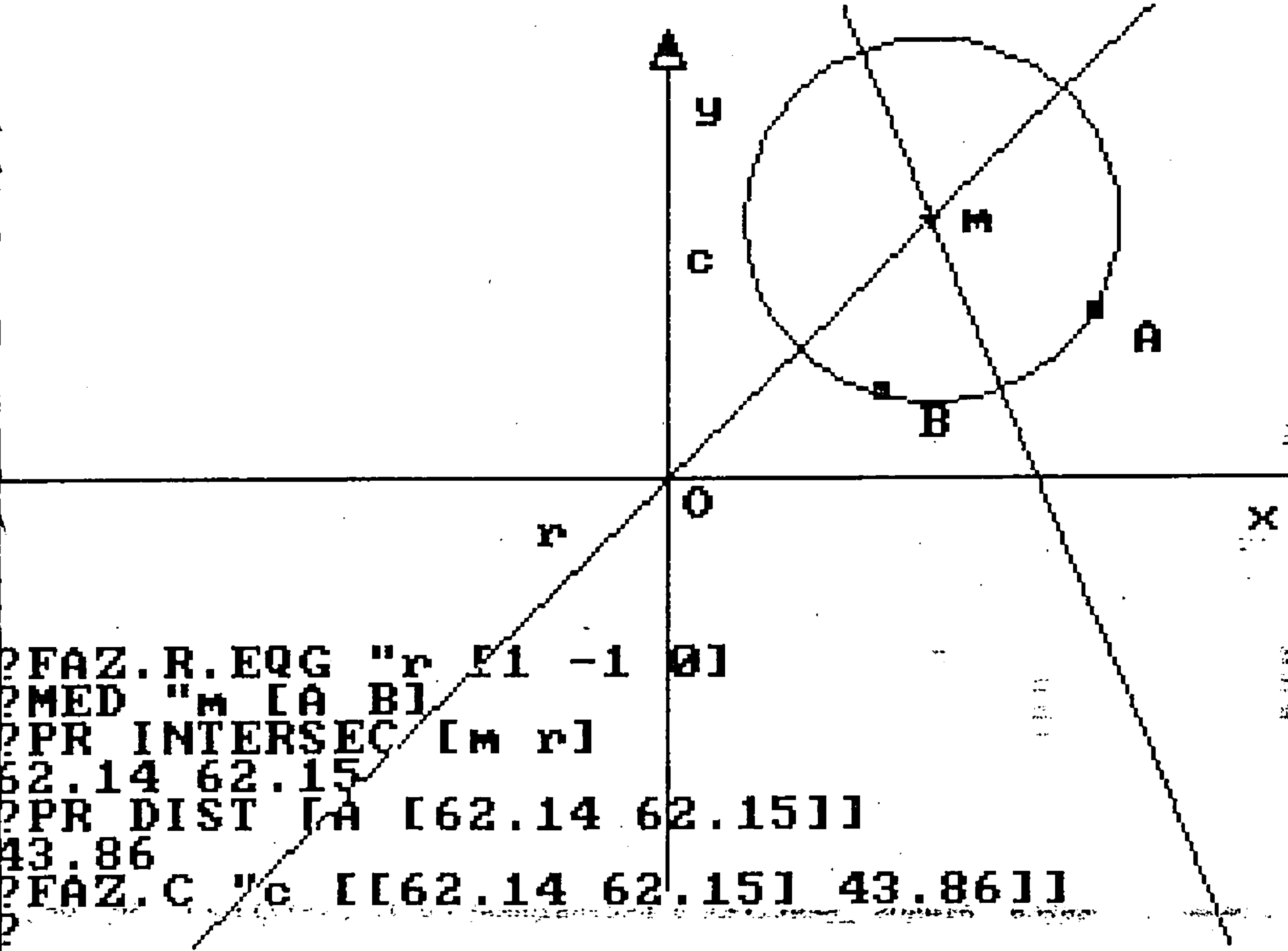
Actividade 1

Todos os grupos resolveram o problema utilizando o Logo.Geometria.

> "Desenhámos os pontos dados. Transfomámos a equação reduzida em geral e desenhámos a recta. Achámos a mediatriz entre os pontos A e B a qual intersectámos com a recta dada. Do ponto obtido achámos a distância ao ponto A e B obtendo o raio. Depois traçámos a circunferência e verificámos que os pontos pretendidos pertenciam à recta e que a recta era tangente (ver figura 17)"(GI6).

Estes alunos sentiram a necessidade de ir verificar se os pontos A e B pertenciam à circunferência. Este facto foi relatado por mais dois grupos. Interpretamos esta atitude como reveladora de um certo espírito de procura de certezas, de verdades.

Na resolução desta actividade foram utilizadas certas propriedades da circunferência não enunciadas e nem justificadas por escrito. "Traçámos a mediatriz de [AB] ...", escrevem os alunos,



Legenda 17: A intersecção da mediatriz de [AB] com a recta dada permitiu encontrar o centro da circunferência pedida (GI6,ACT1.8).

porque o fizeram?, pode-se perguntar. Insiste-se neste aspecto porque com o computador é fácil fazer experiências, é fácil desenhar e apagar rectas. Defende-se a experimentação acompanhada de observação e de reflexão.

Num outro relatório pode-se ler o seguinte:

> "... O nosso grupo tinha tido outra ideia que era a de traçar um vector com a direcção de [AB] e depois um representante com origem em A a que dávamos o nome de $\vec{u}$. Depois um vector perpendicular a $\vec{u}$ e traçávamos uma recta a passar por esse vector que ia intersectar a recta r e ia dar um ponto que seria o centro da circunferência. Este caminho iria ser mais longo e demorado"(GI4).

Embora os alunos não esclareçam bem a posição da recta perpendicular à recta dada r tornando a sua descrição um pouco confusa e incompleta, este relatório informa-nos que os alunos:

- trabalharam em grupo;
- estabeleceram mais do que uma estratégia para resolver o problema, tendo optado pela mais económica;
- transmitiram para o papel todo o trabalho que haviam desenvolvido para a resolução da actividade.

<u>Actividade 2</u>

Para resolver o problema em causa daria muito jeito relembrar que a recta tangente a uma circunferência é perpendicular à recta definida pelo centro e pelo ponto de tangência, para além, claro, da propriedade utilizada na actividade 1. Por desconhecimento ou por falta de lembrança de todas estas propriedades um dos grupos teve de percorrer um longo caminho para construir a circunferência pedida. O ter concluído a resolução da actividade com sucesso deve-se, quanto a nós, à boa ajuda do LOGO.GEOMETRIA -- os alunos puderam desenhar, apagar e voltar a desenhar de novo. O que eles escreveram foi o seguinte:

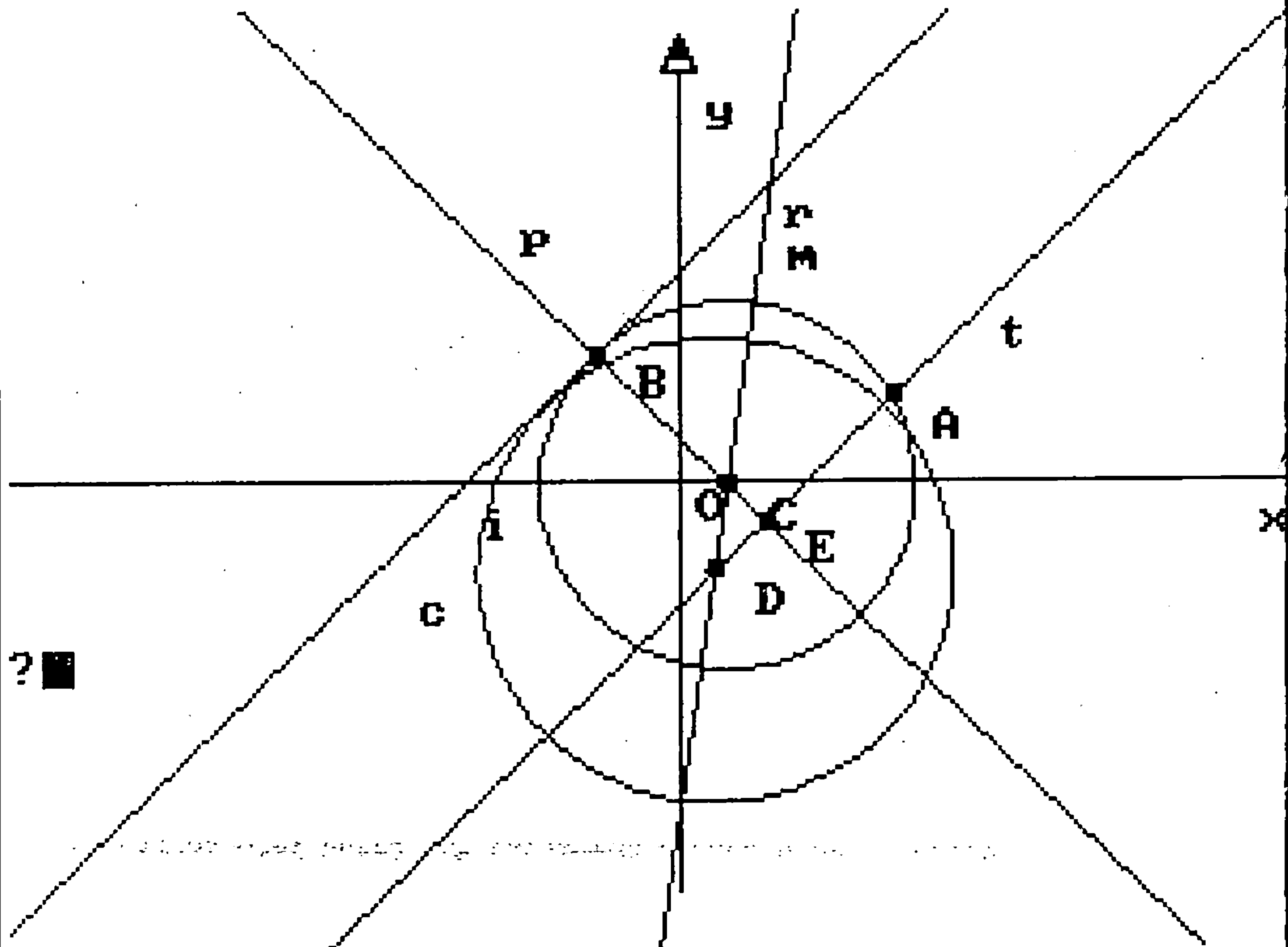
> "Depois de desenhar aquilo que nos era dado, tentámos resolver o nosso problema. Então fizemos uma recta t paralela à recta r que passava pelo ponto A e logo depois fizemos uma recta p perpendicular à recta r passando pelo ponto B. Depois achámos o ponto de intersecção das rectas t e p e achámos o ponto E. Pensámos que o ponto E fosse o centro da circunferência pedida mas a olho nu verificámos que não e então tentámos de outra maneira. Depois desta nossa tentativa falhada, voltámos a falhar numa tentativa que consistiu em achar a mediatriz de [AB] e depois o ponto de intersecção D desta recta com a recta t. Então fizemos uma circunferência com centro em D e verificámos que não era tangente, mas por pouco, daí então vimos que estávamos perto. Então surgiu-nos fazer intersectar a mediatriz m com a recta p (perpendicular à recta dada) e então deu-nos o ponto C. Fizemos uma circunferência com centro em C e raio $\overline{CA}$ e deu-nos a circunferência que procurávamos. Esta circunferência i era tangente à recta r. Para o verificarmos fizemos a intersecção da circunferência i com a recta r e deu-nos como resultado que eram tangentes (ver figura 18)"(GI1).

Este relatório dá-nos uma imagem bastante completa sobre o funcionamento, o trabalho e as ideias do grupo que o apresentou. Este grupo de alunos revelou:

- Não ter medo nem vergonha de errar;
- ter recorrido à sua intuição geométrica para concluir a resolução da actividade, mostrando-nos, ainda, a importância que teve a visualização e a experimentação;
- ter confiança no computador (no que ele constrói e no que ele faz) e nos dados por ele fornecido;
- ter boa disposição no trabalho.

Por este relatório podemos afirmar, com bastante confiança, cremos, que os alunos deste grupo continuaram a ser desconhece-

FIGURA 18



Legenda 18: Estes alunos chegaram à circunferência por tentativas (GI1,ACT2.8).

dores da relação de perpendicularidade entre a recta tangente a uma circunferência num determinado ponto e a recta que passa por este ponto de tangência e pelo centro da circunferência. Esta afirmação é feita com base na forma como os alunos relataram a "descoberta" da circunferência pedida sem menção nenhuma aquela relação. Para eles esta resolução foi uma que deu e não a associam a uma situação mais geral. De facto o LOGO.GEOMETRIA não ensina nada a ninguém. O LOGO.GEOMETRIA cumpre ordens. O trabalho com o LOGO.GEOMETRIA precisa muito do professor como proponente de actividades, como desbloqueador de obstáculos, como questionador e como ajudante de reflexão.

Por outro lado, e embora desconhecedores de algumas propriedades básicas da Geometria Elementar, estes alunos exigiram certezas e foram confirmar se a recta era de facto tangente à circunferência que tinham construído.

Sem o computador estes alunos não teriam, por certo, resolvido, o problema.

Todos os outros grupos resolveram a actividade. Dois deles justificaram a construção da recta definida pelo centro da circunferência e pelo ponto de tangência. Eis uma delas:

> "...Traçámos uma perpendicular à tangente r passando pelo ponto de tangência B, uma vez que o resultado dessa acção é sempre uma recta que passa pelo centro da circunferência"(GI3).

Actividade 3

A actividade 3, que tinha uma função muito especifica a desempenhar (mostrar que a via de resolução que se escolhe para resolver um certo problema, analítica/vectorial/geométrica, depende muito do problema e da dificuldade inerente a cada processo de resolução), provocou uma discussão intensa em vários grupos, chegando mesmo a ser generalizada a toda a turma.

O professor entusiasmado ia discutindo pistas de resolução com os alunos.

"Esse caminho que vocês seguiram dará para todos os casos? Considerem outros dois pontos quaisquer, por exemplo E(40,10) e F(60,40) e construam lá a circunferência que passa por eles e que é tangente ao eixo das abcissas", disse o professor a um dos grupos. Enquanto os alunos tentavam resolver esta nova situação o professor foi abordado por outros grupos aos quais ia sendo colocada a mesma questão. Devido à dificuldade em construirem uma circunferência que satisfizesse o enunciado deste novo problema (quantas tentativas tinham de fazer!), foi surgindo uma certa inquietação nos vários grupos e a discussão foi alargada a toda a turma. Os alunos sentiam-se desafiados pela situação e não estavam a ver como a poderiam ultrapassar. "Este problema dá volta à cabeça", afirmou um aluno a um dos seus colegas. A estratégia seguida para o caso anterior não era aplicável neste. "O caso anterior é um caso particular. A recta paralela ao eixo dos yy e que passa por A passa também pelo centro da circunferência", disseram alguns alunos.

"Então como fazer? Como encontrar o centro e o raio da circunferência?", perguntou o professor a toda a turma. "Se soubessemos o ponto de tangência sabíamos construir a circunferência", disse um aluno. "Mas há duas circunferências!", afirmou um outro aluno, mostrando um pequeno desenho feito à mão na sua ficha de trabalho.

"Neste caso é mais funcional recorrermos à equação da circunferência do que tentarmos a via geométrica para encontrarmos os pontos desejados. Como já falta pouco tempo para tocar e como ainda não resolveram a última actividade ficam esses cálculos adiados para a próxima aula sem computador", disse ainda o professor.

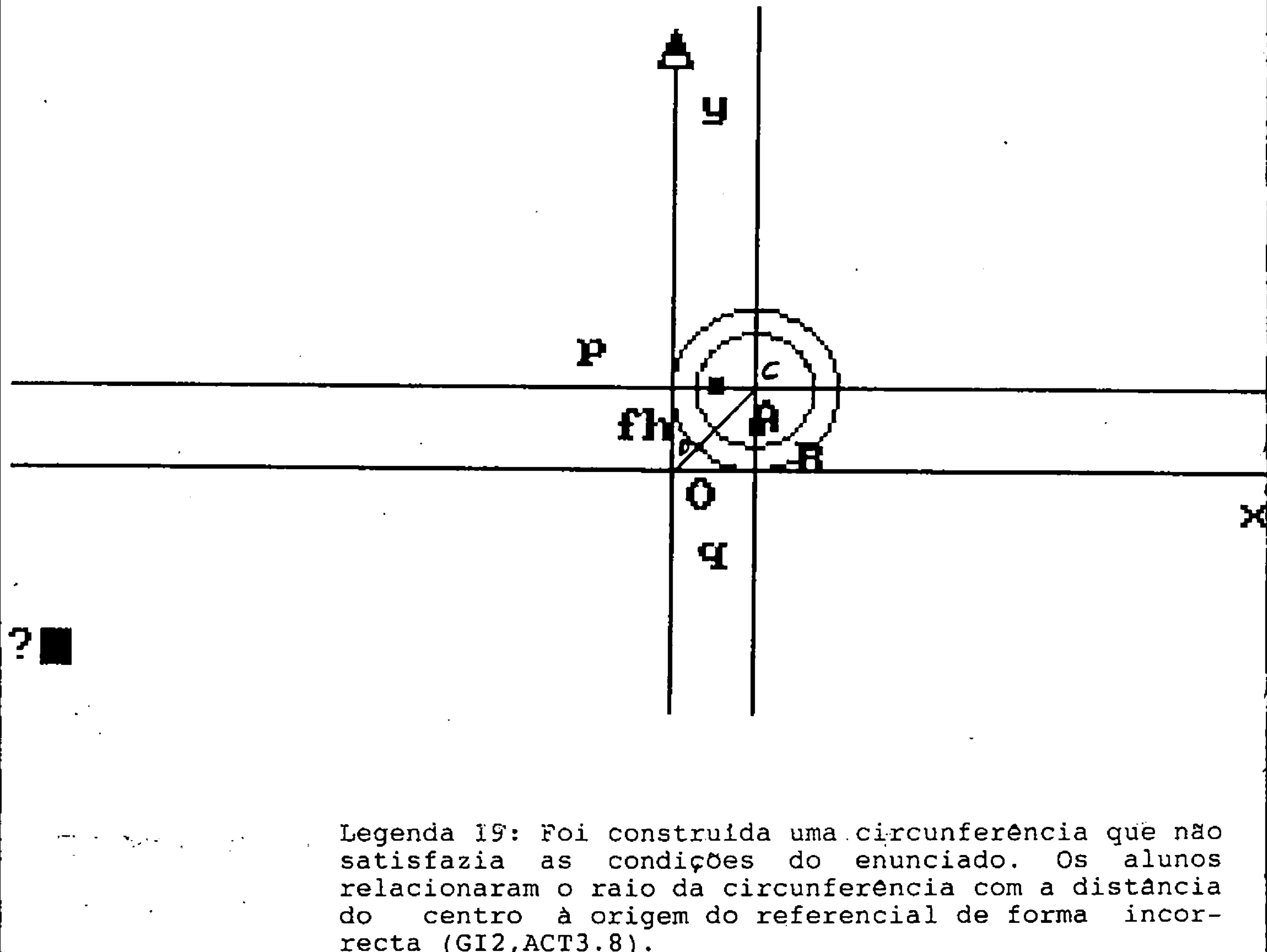
Os alunos passaram à resolução da última actividade da ficha de trabalho e alguns grupos não relataram por escrito as tentativas feitas por eles para resolverem a actividade 3.

Apenas três grupos apresentaram o relatório referente à resolução desta actividade. Um dos relatórios é um pouco confuso, não explicando com clareza a circunferência que foi construída e apresentada (embora respondendo correctamente à pergunta). Um outro grupo acaba por apresentar uma circunferência que não responde ao enunciado do problema:

> "Marcámos os pontos A e B e fizemos uma paralela ao eixo dos yy passando por A e uma paralela ao eixo dos xx passando pelo ponto B. O ponto de intersecção das paralelas é o centro da circunferência. Depois vimos a distância da origem a este ponto e dividimos por 2. Depois fizemos a circunferência (ver figura 19)"(GI2).

Estes alunos não verificaram, decerto, que a circunferência que construíram não satisfazia o enunciado do problema. Esta resolução não permite entender o porquê da "divisão por 2" para a determinação do raio da circunferência. As pequenas dimensões da figura talvez tenham contribuído para este comportamento dos alunos. Nem sempre o que parece é. As imagens são muito úteis mas também podem levar ao engano.

FIGURA 19



Legenda 19: Foi construída uma circunferência que não satisfazia as condições do enunciado. Os alunos relacionaram o raio da circunferência com a distância do centro à origem do referencial de forma incorrecta (GI2,ACT3.8).

O terceiro grupo construiu a circunferência de raio 10 e de centro no ponto de intersecção da mediatriz de [AB] com a recta paralela ao eixo dos yy e que passa por A. Esta circunferência é solução do problema enunciado.

Só há uma solução para o problema? E se os pontos não fossem estes "simpáticos" A e B, como é que se fazia a construção da(s) circunferência(s)? Teríamos que seguir a via analítica?

Actividade 4

Embora tivessem sido apresentados alguns exercícios de resolução imediata, a maioria dos enunciados são problemas bem formulados onde os próprios dados foram pensados e calculados. Parte destes enunciados foram entregues na aula seguinte, tendo ficado como trabalho para casa, justificando-se, assim, a ausência do LOGO.GEOMETRIA na sua formulação. Recorde-se que os alunos só tinham acesso ao programa durante as duas horas da aula semanal.

Um dos enunciados foi o seguinte:

> "Escreva uma equação da circunferência de raio $2\sqrt{10}$ que é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ na origem do referencial"(GI4).

O valor $2\sqrt{10}$ não apareceu por acaso, foi fruto de cálculos que os alunos tiveram de fazer ao formularem o problema. Aliás, todos os dados fornecidos eram necessários. Porém, este problema perde um pouco das suas potencialidades ao ser pensado e resolvido por via analítica e vectorial. Isto constata-se pela resolução que os alunos apresentaram onde, das duas soluções possíveis, apenas uma é calculada. Esqueceram-se da outra? Porquê?

Um outro enunciado foi o seguinte:

> "O segmento de recta [AB] com A(4,1) e B(6,3) é uma corda da circunferência 1 e C(3,6) é o ponto de tangência da recta paralela ao eixo dos xx com a circunferência 2. Sabendo que o centro das duas circunferências é o mesmo, determine-o bem como as próprias circunferências"(GI3).

Este problema está bem formulado e revela imaginação por parte dos seus autores.

> "Foi das aulas mais brilhantes. Os alunos estavam embebidos no trabalho. O LOGO.GEOMETRIA ajudou muito. Aproveitou-se muito das potencialidades geométricas do LOGO.GEOMETRIA",

afirmou o professor no fim da aula.

CAPÍTULO 5

EFEITOS OBSERVADOS DAS ACTIVIDADES DESENVOLVIDAS

Os efeitos observados das actividades desenvolvidas abordados neste capítulo 5 fundamentam-se, essencialmente, nos relatórios apresentados pelos alunos no fim de cada aula com o computador, no diário de registos feito pelo investigador ao longo de todo o trabalho e, ainda, nas opiniões dos professores. Os aspectos relativos a novas atitudes e concepções dos alunos relativamente à Matemática e ao seu papel na aprendizagem desta disciplina, foram muito fundamentados na opinião dos alunos.

A Construção de Conceitos e de Relações Matemáticas

Um conceito, ao ser interpretado como informação ordenada sobre propriedades de um ou mais objectos, acontecimentos ou processos, capacitando-os (ou toda uma sua classe) a ser diferenciados de outros (ou de outra classe) e a ser relacionados, não deve ser identificado com uma sua definição. Esta poderá ter um papel importante na aprendizagem de um conceito, pois o aluno poderá ser ajudado na sua conduta, na sua prática, mas o conceito formar-se-à, essencialmente, a partir da análise de situações, do reconhecimento de propriedades comuns e da comparação com contra exemplos.

Aprofundamento e Consolidação de Conceitos

Vector livre. O conceito de vector livre, introduzido no 7º Ano de Escolaridade, é complexo e abstracto para a generalidade dos alunos desta idade e com esta experiência matemática. "Como é que o mesmo ente pode ser representado por tantos representantes quantos nós quisermos?", perguntam os alunos. "Como é que segmentos de recta orientados equipolentes distintos podem representar o mesmo ser matemático?", perguntam ainda os alunos. Um vector livre é um ser caracterizado por uma direcção, um sentido e um comprimento, e não é só o segmento de recta orientado que se desenha com origem num determinado ponto do plano - afirmam os professores. Mas o que o aluno vê, sente e visualiza quando constrói um vector livre é apenas um segmento de recta orientado aplicado num ponto do plano.

A concretização do abstracto, de que tanto fala Papert (1980), foi feita pelos alunos durante este trabalho.

"Que nome damos ao representante do vector?", perguntaram alguns alunos ao professor aquando da resolução das actividades da ficha Nº 2.

O computador e o LOGO:GEOMETRIA permitiram que a generalidade dos alunos de ambas as turmas, e às perguntas daquela ficha de trabalho, acabasse, como no capítulo anterior já foi referido, por dar respostas do seguinte teor:

> "Podemos apresentar tantos representantes do vector u quantos os pontos que existem no plano"(GA4),

> "Concluimos que podiamos construir uma infinidade de pontos e de vectores quantos esses pontos"(GA2).

Todavia, e mostrando a importância da reflexão e do papel do professor, bem como das várias fases necessárias porque passa um conceito até que seja compreendido pelo aluno, só após um pequeno diálogo na aula é que alguns alunos responderam correctamente à pergunta sobre o número de vectores livres representados no monitor do computador (ver figura 5). Eis um extracto do diálogo estabelecido:

Professor - "Quantos vectores livres estão representados no "écran" do monitor?"

Alunos - "Quatro", respondeu um dos quatro alunos de um grupo (os outros três responderam dois).

"Dois", responderam todos os alunos e após alguma discussão na aula regular do dia seguinte.

Os alunos experimentaram, observaram, reflectiram e discutiram entre si. O vector livre tornou-se-lhes mais familiar e mais próximo.

-<u>Colinearidade de dois vectores</u>. Muitas vezes os alunos confundem direcção com sentido, chegando a afirmar que dois vectores são colineares quando têm o mesmo sentido de orientação. Esta situação resulta, em grande medida, do esquecimento a que tem sido votada a Geometria. Ao pedir-se a um aluno que verifique se os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, utilizando apenas a relação $\vec{u} = k\,\vec{v}$, $k \in \mathbb{R}$, não se está a permitir o aproveitamento da visualização nem o da sua intuição geométrica.

O conceito de colinearidade de dois vectores foi introduzido na aula regular de forma expositiva e com o recurso ao quadro e giz. Na aula com o computador vários grupos de alunos associaram a colinearidade de dois vectores a uma mesma direcção, como pode ser observado através da resposta que foi dada à primeira actividade suplementar da ficha Nº 2,

> "Vamos pelas rectas suporte: se elas forem coincidentes os vectores são colineares (ver figura 6)" (GI3, GI5, GI6).

Porém, outros alunos não deixaram claro se estavam a fazer a mesma associação (talvez, um pouco, devido ao enunciado do problema -- os vectores "não tinham o mesmo sentido", parafraseando os alunos). Por exemplo, o GI4 relatou o seguinte,

> "Fomos pelo CONTEUDO e vimos que os valores obtidos para $\vec{u}$ e para $\vec{v}$ não eram iguais (ver figura 7)"(GI4).

E se os valores obtidos diferissem de 180° ou de um seu múltiplo? Para estes alunos os vectores continuavam a não ser colineares?

O GI2 justificou a não colinearidade, e para a primeira actividade suplementar, pelo facto dos dois vectores "terem sentidos opostos"; para a segunda actividade suplementar, a justificação dada foi "Os dois vectores não têm a mesma direcção". Para estes alunos, sentido e direcção são tratados da mesma maneira, servindo ambos para justificar a colinearidade de dois vectores.

Embora bastantes alunos tenham feito a ligação da colinearidade de dois vectores a uma mesma direcção, alguns deles mostraram ter uma certa confusão entre sentido e direcção. Estes indicadores foram importantes para uma reflexão, por parte do professor, e para uma tomada de posição na aula seguinte quanto ao conceito em causa.

Base de dois vectores do plano. O conceito de base, bem interiorizado pelos alunos, levá-los-á a ver que um mesmo vector será decomposto em combinações lineares diferentes para bases diferentes. A determinação das componentes de um vector e a sua relação com os vectores da base, se feita pelos alunos, conduzi-los-à, certamente, à aquisição do conceito de base. Foi na aula regular anterior à aula com os computadores onde se resolveu a ficha de trabalho Nº 3, que o professor de cada uma das turmas introduziu aquele conceito.

Os alunos da turma de Agricultura sentiram mais dificuldades do que os da turma de Informática na resolução destas actividades sobre bases dos vectores do plano. Houve mesmo um grupo que relatou,

> "Depois de fazermos os vectores $\vec{e}$ e $\vec{f}$, verificámos que não conseguíamos chegar a $\vec{i}$ e $\vec{j}$" (GA5, ACT.2.3).

Porém, o extracto do relatório referente à actividade 3 da ficha Nº 3, do GA1, que a seguir apresentamos, é representativo do que os alunos, na sua globalidade, fizeram com o LOGO.GEOMETRIA:

> "...construímos o ponto C e o vector $\vec{a} = \vec{MC}$. Efectuámos a soma de M com $\vec{u}$ e por este ponto desenhámos duas rectas t e s paralelas aos eixos xx e yy respectivamente. Calculámos as intersecções entre r e xx e entre t e yy e marcámos os pontos G e L. Construímos o vector $\vec{i} = \vec{MG}$ e calculámos as normas de $\vec{e}$ e de $\vec{i}$ e estabelecemos a seguinte relação (100/20). Seguindo o mesmo método para os vectores $\vec{a}$ e $\vec{j}$ chegámos à conclusão que $\vec{z} = 5\vec{e} + 2\vec{a}$ ".

Mas, estarão os alunos aptos a responder à pergunta,

> " $\vec{z} = 3\vec{e} + 2\vec{f}$ será o mesmo vector que $\vec{u} = 5\vec{e} + 2\vec{a}$? "

A resposta foi obtida na aula seguinte sem computador:

> "Sim, são o mesmo vector. As coordenadas são diferentes porque as bases também o são".

A unanimidade de todos os alunos quanto a esta questão, só foi conseguida após alguma discussão com toda a turma.

Os alunos sentiram com a sua prática, com a sua observação e com a sua reflexão, apoiada pelo professor, o significado de base dos vectores livres do plano.

Aquisição de Novos Conceitos

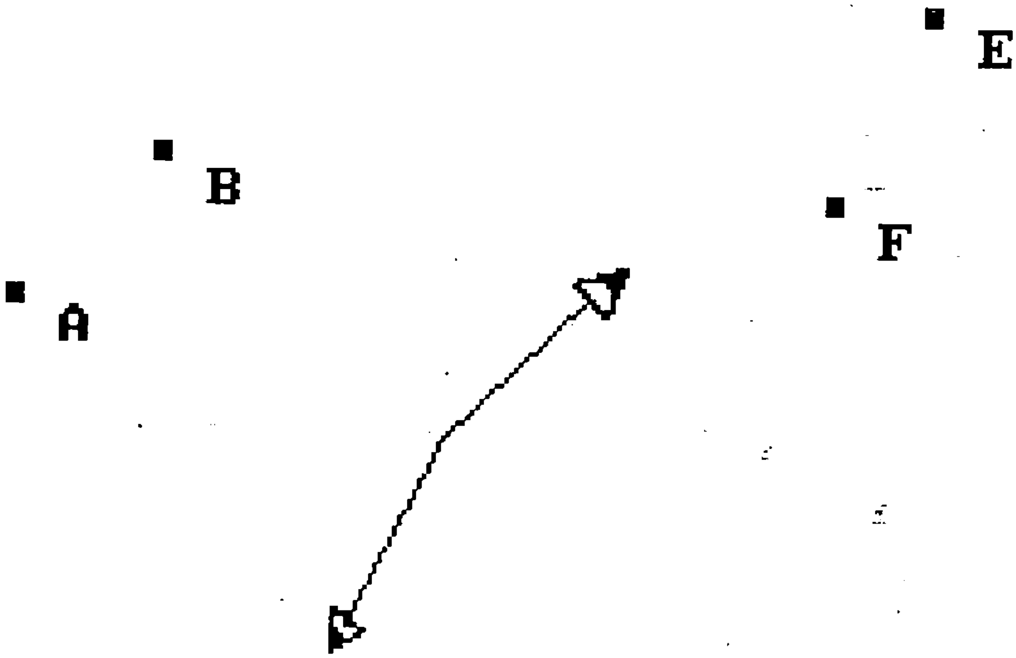
Correspondência entre os vectores livres do plano e $\mathbb{R}^2$. Uma base $(\vec{e1},\vec{e2})$ de vectores livres do plano pode ser considerada uma base dos vectores do plano aplicados num mesmo ponto (pode-se representar $\vec{e1}$ e $\vec{e2}$ por vectores aplicados nesse ponto). Assim, fixada no plano uma base $(\vec{e1},\vec{e2})$ de vectores livres, estabelece-se uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos vectores livres do plano e $\mathbb{R}^2$.

Esta correspondência surge aos olhos dos alunos, muitas vezes, como sendo um pouco contraditória. De facto, como se compreende que o vector livre definido por dois pontos A e B diferentes do ponto O de aplicação dos vectores da base, tenha como coordenadas as coordenadas de um ponto C distinto deles?

A actividade 2 da ficha N<u>o</u> 2 tinha por objectivo apresentar aos alunos esta situação, de modo a conduzi-los à reflexão e à interrogação sobre o que se estaria a passar. Tratava-se de uma situação nova para os alunos.

"O LOGO.GEOMETRIA não fez nada (ver figura 20)",

disseram vários grupos de alunos de ambas as turmas quando construíram o primeiro vector (o vector $\vec{u}$), manifestando, contu-



Legenda 20: O facto de $\overrightarrow{AB}$ não ter aparecido representado por um segmento de recta orientado com origem no ponto A foi motivo de grande admiração para a maioria dos alunos de ambas as turmas.

do, alguma surpresa e admiração chegando a tecer comentários de que o computador estava avariado. Mas a "localização" do segundo vector, o vector $\vec{v}$, já foi prevista por alguns alunos,

> "O computador vai mandá-lo para a origem" (GI5).

No relatório final sobre a resolução desta Actividade a generalidade dos alunos afirmou:

> "Os dois vectores têm a mesma origem, que é a origem do referencial. O LOGO.GEOMETRIA interpreta que um vector livre tem de estar sempre na origem de referencial, mesmo que este vector esteja limitado por outros dois pontos que não o O"(GI6).

Na aula seguinte, sem computador, foi discutido o problema e foi formalizada a situação tendo, os alunos, acompanhado o processo de forma activa com base na sua experiência da aula passada.

A presença dos alunos perante uma situação incompreensível, para eles, apresentada pelo computador, levou-os a interrogações e "obrigou-os" a encontrarem uma resposta para o facto, embora, alguns deles se tenham limitado a afirmar que o computador estava avariado ou que era um brincalhão,

> "Este facto deve-se a uma deficiência do programa" (GI4),

> "É um brincalhão este computador" (GA5).

<u>Ângulo de dois vectores</u>. O ângulo de dois vectores livres não nulos não oferece aos alunos, à partida, dificuldades de maior, desde que tenham presente o que se entende por ângulo de dois vectores não nulos aplicados num ponto, bem como o conceito de vector livre. A importância do ângulo de dois vectores revela-se em muitos problemas não só de Geometria Vectorial mas

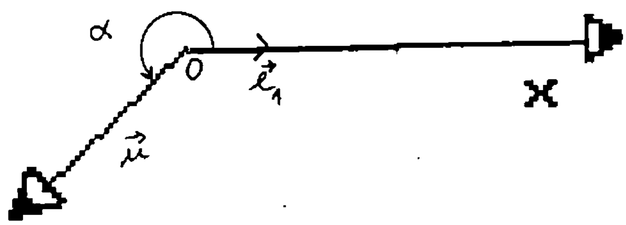
também de Física e de outras ciências afins, conferindo-lhe utilidade. Trabalhá-lo faz parte do programa do 10º ano de escolaridade, porém, na aula onde foi resolvida a ficha Nº 2, ele era, ainda, desconhecido para os alunos. Um dos grupos da turma de Informática (GI1), ao teclar CONTEUDO "u para obter o valor de $\vec{u}\hat{\ }\vec{e}1$, obteve o valor α que não era o pretendido pelos alunos (ver figura 21). Recorde-se que o LOGO.GEOMETRIA neste caso, através de CONTEUDO "u dava o valor de α e não o de $\vec{u}\hat{\ }\vec{e}1$ (o vector $\vec{u}$ fora construído à custa de α). Esta situação originou alguma discussão entre os alunos levando-os, mesmo, a pedir a intervenção do professor. Ao longo do diálogo estabelecido, o professor sentiu a necessidade de introduzir, a estes alunos, o conceito de ângulo de dois vectores. Estavam, assim, criadas as condições para ser utilizado o procedimento ANG.V, com o qual se poderia resolver o problema dos alunos.

O trabalho com o computador, e devido a uma ainda pouca familiarização com o programa, levou a uma pequena alteração da sequência programática prevista.

O computador pode proporcionar uma abordagem mais flexível dos conteúdos programáticos, provocando uma sua maior interligação, ultrapassando mesmo as divisões artificiais que muitas vezes se introduzem nos currículos.

. <u>Conceitos geométricos aprendidos anteriormente</u>. O trabalho com o LOGO.GEOMETRIA proporcionou, por diversas vezes, o aparecimento de situações que não tinham sido previstas. Umas de índole informático (reacções que o computador tinha que não eram esperadas -- por exemplo, reacções provenientes de uma pequena avaria),

FIGURA 21



Legenda 21: como resposta a CONTEUDO "u, o LOGO.GEOMETRIA deu o valor de α e não o de $\vec{u} \wedge \vec{e}1$, como pretendiam os alunos do GI1.

outras relativas ao próprio programa (comandos mal dados) e outras de índole matemático. Um destes casos surgiu na resolução da actividade 2 da ficha de trabalho Nº4. Os alunos do GI1, construíram o ângulo AOB (ver figura 9) e intersectaram a bissectriz do mesmo com o segmento de recta [AB]. Estes alunos ficaram admirados porque as coordenadas desse ponto não coincidiam com as coordenadas do ponto médio do segmento de recta indicadas na ficha de trabalho. Como não encontrassem uma explicação para tal facto, os alunos solicitaram a presença do professor. Do diálogo estabelecido entre eles ficou claro, para todos, que essa coincidência só aconteceria se os ângulos a e b fossem geometricamente iguais.

O trabalho com o computador levou a que fossem recordados conceitos geométricos já aprendidos anteriormente que, por imperativos imprevistos, foram trazidos para o local de trabalho.

<u>Relações e Leis Matemáticas</u>

Aos alunos foi permitido, através da experimentação, observação e reflexão, <u>descobrir</u> relações e leis matemáticas até então suas desconhecidas. Algumas delas foram demonstradas na própria aula pelos alunos, outras transitaram para a aula seguinte sem computador, onde o professor explorou e formalizou com os alunos o trabalho desenvolvido na aula com o computador.

<u>Coordenadas do vector soma</u>. A adição de vectores traduzida na adição ordenada das coordenadas dos vectores parcelas foi uma relação a que os alunos, na sua totalidade, chegaram com a reso-

lução da actividade 4 da ficha No 3:

"o vector z = -e + 4f tem as coordenadas do vector u+v".

O facto do computador facilitar a obtenção de dados, tais como as coordenadas de um vector, e permitir construir os próprios vectores, proporcionou aos alunos, e de uma forma relativamente rápida, a descoberta da relação entre as coordenadas do vector soma e a soma das coordenadas correspondentes dos vectores parcelas.

<u>Coordenadas do ponto médio de um segmento de recta</u>. A actividade 2 proposta aos alunos na ficha No 4 foi elaborada de forma a que os alunos conjecturassem a relação pretendida e a testassem para alguns casos escolhidos por si. Todos os grupos de ambas as turmas estabeleceram a relação entre as coordenadas do ponto médio do ponto médio do segmento de recta dado e as coordenadas dos seus pontos extremos. Alguns grupos generalizaram e testaram a relação então encontrada. A experimentação feita pelo GA1 pode ser vista através do seguinte extracto do seu relatório:

> "Considerámos outro segmento de recta t com os extremos C e E. FAZ.P "C [-130 80], FAZ.P "E [20 50] e FAZ.S "t [C E]. Fizemos os cálculos (-130 + 20)/2 e (80 + 50)/2 e pedimos ao computador as coordenadas do ponto médio de t e obtivemos o par de valores (-55,65) ... ".

O LOGO.GEOMETRIA com as suas características (construção de pontos e de segmentos de recta; cálculos) permitiu que os alunos relacionassem e testassem para vários casos, para além do dado inicialmente na ficha de trabalho, e que chegassem à relação entre as coordenadas do ponto médio de um segmento e as coordenadas dos seus pontos extremos.

A relação entre o declive de uma recta e as coordenadas de um seu vector director. Para muitos alunos, falar numa dada direcção não é fácil, na medida em que eles, muitas vezes, não a vêm como uma classe de equivalência, mas sim como uma propriedade inerente apenas ao caso concreto com que estão a trabalhar. O declive de uma recta como identificador de uma direcção é, pois, um aspecto importante a trabalhar com os alunos.

Como relacionar o declive de uma recta e um seu vector director?

Como relacionar a interpretação vectorial com a geométrica e com a analitica?

Na actividade 1 da ficha No 6 pedia-se, aos alunos, a descoberta de uma relação entre o declive de uma recta e as coordenadas de um seu vector director. O caso apresentado tinha sido escolhido de modo que os valores observados facilitassem a formulação de uma conjectura relativa ao que se pedia (recorde-se que o declive da recta dada era 0.4 e as coordenadas do vector director da recta que o computador dava eram (-100,-40)). Todos os grupos explicitaram a descoberta da relação em causa, embora alguns deles se tenham satisfeito com a descoberta para o caso apresentado. A testagem da relação, feita pelos grupos GI1 e GI2, baseou-se nos construtores AO ACASO dando bastante força à validade da conjectura. O GI3 justificou a relação encontrada da seguinte forma

> "... porque o declive é igual à tg a e que é igual ao cateto oposto (ordenada) sobre o cateto adjacente (abcissa), o que acontece em todos os quadrantes",

revelando uma interligação entre as coordenadas de um vector director de uma recta, o declive dessa mesma recta e a sua inclinação.

Alguns dos alunos revelaram, neste caso, uma certa necessidade em justificar a relação encontrada, e tiveram no LOGO.GEOMETRIA um bom ajudante para o fazerem, nomeadamente através dos construtores AO ACASO.

A relação entre o declive de duas rectas paralelas. Os alunos, muitas vezes, têm dificuldade em identificar duas ou mais rectas paralelas com uma mesma direcção. E o problema da passagem do individual, do caso concreto, para o mais geral, para todos os casos. Há como que o raciocinio viciado "cada recta, cada direcção".

Com a actividade 2 da ficha No 6 pretendia-se que os alunos descobrissem a relação de igualdade entre os declives de duas rectas paralelas.

Todos os grupos escreveram nos seus relatórios que a relação existente era a de igualdade entre os declives.

Um dos relatórios apresentados (GI3) é revelador da noção clara que estes alunos tinham de declive de uma recta e da interiorização do significado de direcção, como se pode observar pelo extracto que a seguir se apresenta:

> "... os declives são iguais pois se as rectas são paralelas formam o mesmo ângulo entre si (0) e com quaisquer outras rectas, caso do eixo das abcissas."

A maioria dos alunos recorreu à relação entre o declive da recta e as coordenadas de um seu vector director, aliás, relação esta obtida na primeira alínea da ficha de trabalho. Os alunos pediram ao computador um vector director de cada uma das três rectas dadas e calcularam o quociente entre as ordenadas e as abcissas respectivas.

<u>Relação entre o declive de duas rectas perpendiculares</u>. Relacionar o declive de duas rectas perpendiculares poderá permitir relacionar conhecimentos sobre vectores perpendiculares, bem como sobre o de produto interno de dois vectores. E, pois, uma relação matemática bastante rica pelos conceitos matemáticos que pode pôr em relação entre si (geométricos, vectoriais e analíticos).

O facto dos alunos terem experimentado que o produto dos declives de duas rectas perpendiculares era igual a -1 (actividade 3 da ficha Nº 6), foi um passo importante para uma sua reflexão e para o trabalho de formalização da relação na aula seguinte sem computador. Mesmo durante a aula com o computador, bastantes foram os alunos que testaram para outros casos, por si escolhidos, a relação encontrada para a situação inicial.

> "... O produto é igual a -1. Voltámos a fazer duas rectas perpendiculares e obtivemos -1 ..." (GI6).

A maior dificuldade, na descoberta da relação entre os declives de duas rectas perpendiculares, sentida por alguns alunos derivou do facto do computador apresentar certos resultados (consoante as situações) com dez casas decimais. Após a truncadura (ficando com valores aproximados até às milésimas), o produto dos declives que os alunos obtinham não era um valor que permitisse tirar alguma ilacção.

A experimentação que os alunos fizeram, possível e facilitada pela presença do computador, associada aos seus conhecimentos de

Geometria Vectorial, tornaram produtiva esta actividade ao ponto de alguns grupos esboçarem uma demonstração da relação encontrada.

<u>Construção da fórmula para o cálculo do ângulo de duas rectas</u>. Pelo excesso da memorização e da mecanização a que se tem votado o ensino da Matemática, a beleza de muitas das fórmulas matemáticas é ignorada pelos alunos. E como que uma vingança! Uma fórmula, vista e sentida como qualquer coisa que sintetiza, que abrevia, que incorpora todo um conjunto de conhecimentos que permitirá resolver um determinado problema, merecerá, decerto, uma outra atitude.

Com a actividade 1 da ficha Nº 7 pretendia-se que os alunos construíssem uma fórmula a partir da qual se pudesse calcular a medida da amplitude do ângulo de duas rectas. Tratava-se de uma proposta de trabalho aberta em relação à qual não se poderia prever o resultado, mas que se esperava poder vir a constituir uma experiência positiva para os alunos.

A maioria dos grupos de alunos da turma resolveu a actividade da forma a seguir indicada:

> "Começámos por desenhar as rectas a partir das suas equações. De seguida desenhámos os seus vectores directores através dos comandos existentes. Calculámos o produto interno $\vec{u}.\vec{v}$, que era igual a 1749,95. De seguida calculámos as normas de cada um deles, $||\vec{u}||$ = 70,71 e $||\vec{v}||$ = 78,26. Tirando o valor de $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\vec{u}.\vec{v})/(||\vec{u}||.||\vec{v}||)$ veio $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ = 0,3162313771. Daqui tirava-se o valor do ângulo"(GI3).

O GI8 ainda apresentou uma outra resolução com um pendor geométrico mas pouco desenvolvido.

A aula seguinte, sem o computador, foi "viva e rentável", afirmou o professor.

> "O caso em que o ângulo dos dois vectores directores está compreendido entre 90° e 180° (e que não chegou a ser explorado na aula com o computador) foi analisado com uma certa facilidade por parte dos alunos -- esta discussão foi feita em diálogo entre o professor e os alunos. O módulo que aparece na fórmula
> $$|(AA' + BB')/[(A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2)]|$$
> nada teve de mágico para os alunos, pois tinham bem presente o trabalho que haviam desenvolvido na aula anterior",

afirmou ainda o professor.

Os alunos construíram uma fórmula com a ajuda do LOGO.GEOMETRIA para calcular a medida da amplitude do ângulo de duas rectas. A tarefa não foi fácil, pois demorou até que fosse resolvida. O caminho que os alunos tinham de seguir era contrário ao que normalmente é utilizado por eles, o das fórmulas para o resultado, dificultando a sua tarefa.

Terá esta experiência contribuído para alguma alteração das concepções que os alunos têm relativamente à Matemática e ao seu papel na sua aprendizagem?

Construção intuitiva de Novos Conceitos

Neste ponto gostaríamos de focar duas situações que se viveram com os alunos de Informática durante as aulas com computador.

Alguns alunos intuíram a noção de declive de uma recta. O processo que eles seguiram para resolver a actividade 1 da ficha Nº 5 foi intuitivo sobre a inclinação de uma recta.

Na resolução desta mesma ficha de trabalho, alguns alunos associaram os seus conhecimentos sobre vectores (soma de um ponto com um vector, produto de um número real por um vector, vectores colineares) com a sua noção de recta, de uma forma intuitiva, permitindo-lhes chegar à equação vectorial de uma recta.

<u>Declive de uma recta</u>. Na actividade 1 da ficha de trabalho Nº5 era pedido, aos alunos, a construção de cinco pontos de uma recta com uma determinada direcção e que passava por um certo ponto A. O grupo de alunos GI1 começou por construir o ponto A(-50,20) e o vector $\vec{u}(100,30)$ -- ver figura 13. Em seguida construiu o ponto C(-50+100, 20+30) e a recta r com a direcção de $\vec{u}$ (os alunos verificaram que A pertencia à recta r). Em seguida construiu o ponto D(50+10, 50+3) e os alunos verificaram que este ponto também pertencia à recta r.

À observação do investigador,

> "Expliquem lá essses cálculos",

os alunos responderam,

> "Ora veja, somámos 10 à abcissa de C e 3 à sua ordenada, obtendo assim o ponto D".

> "Então indiquem-me outro ponto da recta",

pediu o investigador. Os alunos fizeram os seus cálculos e consideraram o ponto E(70,66). Mas, e para seu espanto, o ponto E não pertencia à recta.

> "Devia pertencer!",

disseram os alunos.

> "Bom, discutam entre vocês porque é que o ponto C pertence à recta e porque é que o ponto E não pertence",

disse, ainda, o investigador.

Mais tarde, e após discussão acesa entre eles e o professor, sobre o que tinham feito e sobre o porque o fizeram, os alùnos afirmaram:

> "Acrescentámos algumas unidades à abcissa de A e outras à sua ordenada de acordo com a proporção existente nas coordenadas de $\vec{u}$ (a ordenada sobre a abcissa). Só que erramos os cálculos para o caso do ponto E. Deveria ser E(70,56) e não E(70,66)".

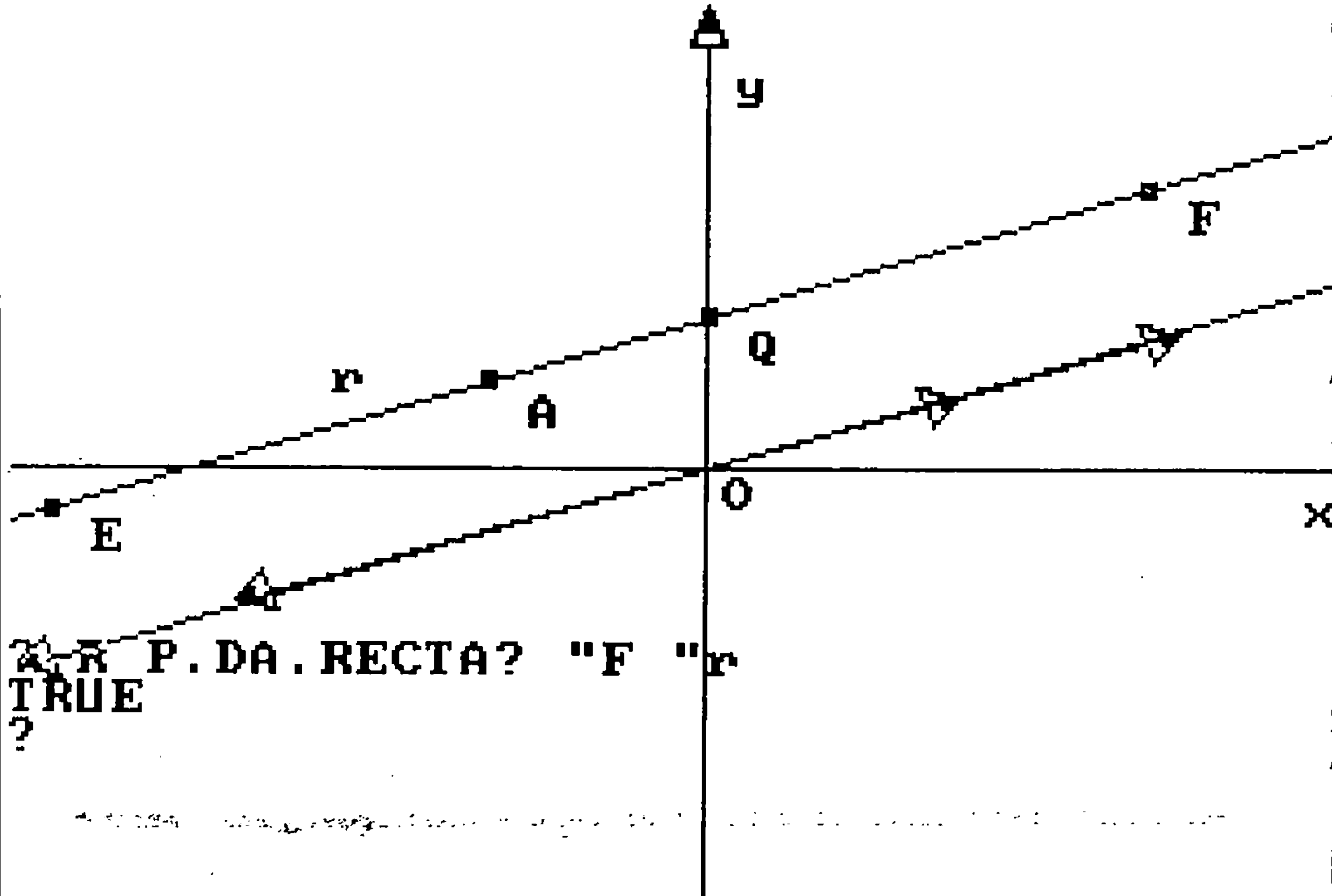
A noção de declive de uma recta ainda não tinha sido trabalhada nas aulas (esta actividade foi a primeira que os alunos tiveram sobre o estudo da recta). O facto dos alunos terem imposto uma constante de proporcionalidade ("a ordenada sobre a abcissa"), é revelador de um sentir intuitivo da noção daquele conceito. O LOGO.GEOMETRIA teve um papel auxiliar bastante grande, na medida em que possibilitou a experimentação e a utilização da imagem. Os alunos observaram, pensaram intuiram e mandaram executar.

<u>Equação</u> <u>vectorial</u> <u>de</u> <u>uma</u> <u>recta</u>. Na resolução da actividade 1 da Ficha Nº5, onde se pediam cinco pontos de uma recta de que se sabia um ponto e uma direcção dada por um seu vector director, alguns grupos de alunos (GI3 e GI4) seguiram o seguinte caminho,

> "Começámos por traçar o vector $\vec{u}$ e o ponto A. De seguida traçámos a recta r que passou pelo ponto A e era paralela a $\vec{u}$. Depois fizemos a soma do ponto A pertencente à recta r com o vector $\vec{u}$. Depois somámos A com vectores com comprimentos diferentes do de $\vec{u}$ (colineares) obtendo assim pontos em diversos locais da recta. Perguntámos ao LOGO.GEOMETRIA se estes pontos pertenciam à recta r e ele respondeu que sim (ver figura 22)".

Esta resolução, feita por alunos que pela primeira vez estavam a estudar a recta sob o ponto de vista vectorial é, quanto a nós, demonstrativa da influência da intuição. Na realidade, estes alunos bem poderiam ter seguido outro caminho diferente para a

FIGURA 22



Legenda 22: A construção dos pontos da recta pedidos foi feita através da soma do ponto A com vectores colineares com $\vec{u}$ (GI3,ACT1.5).

construção dos pontos pedidos, como o do GI6, por exemplo, em que cada ponto pedido foi obtido pela soma do ponto construído no passo anterior com um vector colinear com $\vec{u}$. Provavelmente, através deste caminho, os alunos não teriam chegado, por si, à equação vectorial da recta,

> "Chegámos à conclusão que qualquer ponto da recta pode ser achado através da equação $P = A + k\vec{u}$ " (GI3).

Isto só é válido para o GI3, pois o GI4 nada escreveu sobre a equação vectorial da recta.

Trata-se, de facto, duma descoberta fruto da sorte da escolha de um certo caminho para a resolução de um problema. Mas, não tem sido assim, também, que parte da Matemática se tem desenvolvido?

Conclusão

Os alunos puderam trabalhar conceitos já seus conhecidos, aprofundando-os e consolidando-os, e puderam iniciar a aprendizagem de outros que eram, para eles, desconhecidos. Com base na experimentação proporcionada pelo computador, os alunos descobriram relações matemáticas, algumas delas muito baseadas na sua intuição. Foi possível, a estes alunos, concretizar o abstracto, tornando mais concreto e familiar certos conceitos. Por várias vezes, ao longo do trabalho, surgiram situações imprevistas provocando uma maior interligação, com alguma antecipação, dos conteúdos programáticos do 10º ano de escolaridade. Talvez pela primeira vez muitos alunos tenham estado perante a necessidade de construir uma fórmula matemática, de a sentir como algo que tem uma origem, uma explicação e uma utilidade.

A Capacidade de Formulação e Resolução de Problemas

Resolução de Problemas

A resolução de um problema é afectada por múltiplos factores, uns intínsecos ao problema, outros à pessoa que se propõe resolvê-lo, outros, ainda, exteriores quer ao problema quer ao sujeito.

Quantas vezes não ouvimos já, das bocas dos nossos alunos, frases como: "O senhor professor, não percebo o enunciado. O que é que esta frase quer dizer?". A linguagem utilizada na formulação do problema é, de facto, um factor que influencia a resolução do mesmo, pois a interpretação que dele fazemos depende muito da forma como o problema é formulado.

O assunto de que trata o problema assume, também, uma importância bastante grande. Resolver um problema sobre um certo tema, com o qual temos afinidades, é diferente de resolver um problema relacionado com um assunto menos familiar. No primeiro caso existirão, por certo, mais condições para uma boa resolução.

As capacidades e os interesses de quem vai resolver um problema, aliados aos seus conhecimentos já adquiridos, constituem, também, factores que influenciam a resolução de um problema. Pedir-se a uma pessoa que resolva um problema em relação ao qual ela é bastante alheia, quer em capacidades adquiridas através de experiências anteriores semelhantes, quer nos seus interesses pessoais, quer, mesmo, nos seus conhecimentos sobre o conteúdo do mesmo, leva a que se possa esperar vir a ter maiores dificuldades numa boa resolução do problema.

Quantas vezes encontramos alunos a dizerem que não gostam da disciplina A porque não gostam do professor, ou dos colegas, ou mesmo porque nas aulas encontram um ambiente hostil? A resolução de um problema é afectada pela ligação afectiva do aluno à disciplina, ao professor, aos colegas e ao próprio ambiente que se vive na sala de aula. O mesmo aluno resolverá de maneiras diferentes o mesmo problema se este lhe fôr colocado em contextos diferentes. "O senhor professor, eu até sabia resolver o problema, mas no quadro, em frente aos meus colegas, que estão sempre a gozar comigo, que estão sempre a fazer troça de mim, não fui capaz!".

Quantas vezes presenciamos situações destas? Infelizmente não são assim tão poucas quanto isso.

Os aspectos metodológicos que os alunos seguem, a forma como eles ultrapassam os obstáculos que se lhes deparam, as próprias motivações que os movem acabam, também, por influenciar a resolução de um problema.

Diferentes Estratégias para a Resolução do mesmo Problema

A interpretação do enunciado de um problema é pessoal, bem como a estratégia definida para a sua resolução. O trabalho em grupo, entre alunos com origens sociais e culturais diferenciadas, com experiências, conhecimentos, motivações, interesses e personalidades distintas, reforça o aparecimento e o confronto de estratégias diferentes para a resolução de um mesmo problema. Se o ambiente de trabalho, por sua vez, fôr tal que favoreça o envolvimento dos alunos na resolução das actividades propostas, é natural que se revelem, para cada um e para todos os problemas, vários processos diferentes de resolução, quer inter grupo quer entre grupos.

Mesmo nas situações de pura construção geométrica de uma figura dada no enunciado do problema, foram observadas, ao longo deste trabalho com o LOGO.GEOMETRIA, diversas maneiras diferentes de a construir. Como exemplo deste facto é a construção da figura indicada na ficha de trabalho Nº 1, onde foram apresentadas quatro processos de construção diferentes. Nesta aula, constatámos alguma admiração por parte dos alunos quanto à diversidade de processos que acabaram por aparecer na construção da figura. Até que ponto terá sido abalada a sua atitude para com a Matemática, vista por eles inflexível, categórica e pragmática, baseada em respostas do tipo "Isto é assim que se faz. Isto é assim que se resolve. O caminho é este."?

Verificaram-se resoluções geométricas e vectoriais em paralelo com resoluções analíticas, embora estas tenham sido as preferidas pelos alunos. A permanência desta tendência ao longo do trabalho desenvolvido, embora atenuada com o seu evoluir, foi mesmo uma certa surpresa para o investigador. Este estava convencido, à partida, que com o computador iria subverter por completo as tendências que os alunos já traziam consigo. Esta convicção baseava-se provavelmente numa certa ingenuidade e voluntarismo. Na realidade, nem tudo ficou na mesma, mas comprovou-se que um processo de mudança de concepções e atitudes leva o seu tempo de gestação. Houve, mesmo, um reforçar da convicção que a utilização do computador feita de forma esporádica, passageira, em pouco ou nada alterará as situações existentes.

Um exemplo da tendência pela resolução analitica manifestada pelos alunos é a resolução da actividade 3 da ficha de trabalho Nº 4, onde a maioria dos grupos, de ambas as turmas, resolveu o problema de forma analitica. A estratégia vectorial utilizada foi a seguinte:

> "Após construirmos os pontos A e M traçámos o vector $\overrightarrow{AM}$ e depois com PROD.K.V fizemos o vector $2\overrightarrow{AM}$. De seguida determinámos o ponto B através da soma de um ponto com um vector, $B = A + 2\overrightarrow{AM}$. Para sabermos as coordenadas do ponto B usámos o comando CONTEUDO "B (ver figura 10). (GI4).

A estratégia geométrica foi apresentada pelo grupo GI6:

```
"FAZ.P [M A] [[-60 25][-10 40]]
 FAZ.S "a [M A]
 PR DIST [M A]  --------> 52.2
 FAZ.C "b [M 52.2]
 RECTA.S "s "a
 PR INTERSEC [s b]
 as coordenadas de B são (-110, 10)
 (ver figura 11)" (GI6).
```

Ao longo das dez semanas de trabalho com o LOGO.GEOMETRIA verificou-se que, mesmo quando as estratégias utilizadas para a resolução dum problema eram do mesmo tipo, quase sempre existia uma pequena diferença entre elas (ora se recorria a uma relação diferente, ora se utilizava uma outra fórmula). Exemplo deste facto são as duas resoluções do problema da actividade 2 da ficha Nº 5.

Nesta experiência os alunos resolveram os vários problemas com o recurso a estratégias diferentes, embora com uma maior tendência para a resolução analitica. O LOGO.GEOMETRIA foi bastante responsável pelo aparecimento de estratégias distintas, pois abriu o leque das alternativas e facilitou outras soluções.

Persistência na Resolução de Problemas

A resolução de um problema depende muito da forma como reage, como se comporta quem o está a resolver, face às dificuldades que vão surgindo durante a resolução do mesmo: desistirá à primeira dificuldade que apareça? Como reagirá aos "becos sem saída", pelo menos à primeira vista?

Muitas vezes há um atrofiamento das capacidades individuais devido ao medo de errar, de cometer erros, conduzindo, frequentemente, à paralisação e desistência. Todavia, se os erros cometidos forem encarados como fonte de melhoria do processo seguido, de reflexão e análise sobre o que foi feito, poderão transformar-se num auxiliar precioso para uma boa resolução de um problema, fomentando a persistência e conduzindo ao sucesso.

Apenas num caso, o da actividade 2 da ficha Nº 3, é que os alunos de um grupo da turma de Agricultura (GA5) se ficaram pelo relato da dificuldade que tiveram em continuar a resolução do problema, não tendo indicado sequer uma resolução para ele,

> "Depois de construírmos os vectores $\vec{e}$ e $\vec{f}$ verificámos que não conseguiamos chegar ao cálculo de $\vec{i}$ e $\vec{j}$".

Tratava-se de uma actividade sobre o conceito de base, introduzido na aula regular anterior, a qual estes alunos não se sentiram capazes de resolver sozinhos. Porém, este mesmo grupo (GA5), na aula seguinte com o computador e na resolução da actividade 3 da mesma ficha de trabalho, relatou o seguinte:

> "Encontrámos sérias dificuldades, no entanto depois de várias tentativas conseguimos chegar à seguinte conclusão: $\overrightarrow{ON} = 5\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{CM} = 2\vec{a}$"(GA5,ACT3.3).

Outros alunos evidenciaram, também, de forma explícita, nos seus relatórios a sua atitude de persistência:

> "... ao fim de sucessivas voltas (tentativas) e com alguma ajuda do professor (muito pouca) chegámos à óbvia conclusão ..." (GI3,ACT1.2),

e, ainda,

> " ... ao fim de uma longa busca exaustiva do nosso grupo 'os persistentes', ... , conseguimos ao fim de mil e um processos de procura, concluir que na base $(\vec{e},\vec{a})$, $\vec{v} = 5\,\vec{e} + 2\,\vec{a}$"(GA3,ACT3.3).

Outros grupos, embora não o explicitando nos seus relatórios, acabaram por mostrar, através dos relatos que fizeram sobre o processo que seguiram para a resolução das actividades propostas, a sua atitude perante as dificuldades e até sobre os próprios erros cometidos. Foi o caso de um grupo de alunos da turma de Informática (GI1), que não desistiu da estratégia por si escolhida para a resolução do problema da actividade 1 da ficha Nº 5, pelo facto de um dos pontos por eles construído não pertencer à recta dada,

"Mas este ponto E(70,66) devia pertencer à recta!",

disseram os alunos. Estes, em vez de desistirem, meteram "mãos à obra", e recapitulando todo o caminho que haviam seguido até ao ponto em causa, acabaram por verificar que se tinham enganado nos cálculos. Eles acreditaram na estratégia por que optaram e recapitularam todo o processo seguido acabando por detectar o erro que estavam a cometer (passando por uma "discussão" com o professor).

Situações como esta, de defesa convicta da estratégia seguida (a optada pelos alunos após reflexão e discussão entre os elementos do grupo), pese embora o mau resultado que estava a ser obtido, puderam ser observadas, com alguma frequência, ao longo deste trabalho.

Por exemplo, em plena resolução da actividade 2 da ficha No 7, o professor chamou a atenção dos alunos do grupo GI4, que o vector que eles tinham construído não satisfazia o enunciado do problema. Esta constatação já tinha sido feita pelos alunos, só que eles estavam a atribuir o estranho facto a factores exteriores a si. Na realidade os alunos estavam a considerar como vector director da recta o vector (10, -40), o que estava correcto, só que tinham introduzido mal os dados no computador (o que eles desconheciam), tendo construído o vector (-10, -40) em vez do vector que queriam.

> "Não, não, nós estamos a fazer bem, pois se m = -4, o vector (10, -40) leva-nos a que m = -40 / 10 = -4. O computador é que está avariado",

disseram os alunos. Este comportamento de defesa e argumentação do que haviam feito é diferente daquele a que estamos habituados, onde os alunos se dão por vencidos à primeira adversidade. O professor aconselhou-os a reexaminarem o que tinham feito no sentido de encontrarem uma resposta para tal acontecimento. Os alunos depois de pedirem as coordenadas do vector que haviam construído, concluíram com uma certa satisfação que se tinham enganado na introdução dos dados.

Gostaríamos, ainda, de falar no caso de um grupo da turma de Informática (GI1) que para resolver o problema da actividade 2 da ficha No 8 precisou de três tentativas. Escreveram os alunos no seu relatório:

> "Depois de desenharmos o que nos era dado, tentámos resolver o nosso problema ... pensámos que o ponto E era o centro da circunferência ... Depois desta nossa tentativa falhada, voltámos a falhar, mas por pouco, estávamos perto. Então surgiu-nos fazer intersectar a mediatriz ... e deu-nos a circunferência que procurávamos ..."(ver figura 18).

Estes alunos socorreram-se muito da representação geométrica e da sua observação, tendo utilizado um processo de "tentar e aproximar até acertar". As tentativas falhadas serviram-lhes para uma aproximação geométrica, tendo-os conduzido à resolução do problema.

Os alunos destas duas turmas não desanimaram nem desistiram perante o insucesso de uma primeira tentativa falhada na resolução de um problema. Os alunos assumiram as coisas quando se sentiram responsáveis pelo que estavam a fazer, mostrando-se persistentes e bons defensores das estratégias por eles definidas, onde o próprio erro assumiu um papel positivo.

Intuição e Criatividade

Um dos obstáculos ao sucesso na resolução de problemas é, muitas vezes, a não existência de condições para que, cada pessoa, possa utilizar a sua intuição e a sua criatividade. A criação de um ambiente de trabalho propicio a tal, assume, pois, uma grande importância para uma boa resolução de problemas.

Ao longo de todo este trabalho foram observadas estratégias de resolução de problemas bastante intuitivas. Na actividade 2 da ficha Nº 3, por exemplo, eram pedidas aos alunos, as coordenadas de um vector (dado através da decomposição linear relativa a uma certa base) numa base diferente da inicial. Muitos dos alunos intuíram as coordenadas do vector e foram verificar, através do LOGO.GEOMETRIA, se estavam certos ou não.

> "... começámos por marcar o vector $\vec{g} = -\vec{e}$ e o vector $\vec{h} = -\vec{f}$ e depois construímos o vector $-3\vec{g} - 2\vec{h}$ e fomos verificar se era o vector $\vec{u}$" (GA1).

O mesmo se passou com outros grupos, como, por exemplo, o grupo GI5:

> "Verificámos que o vector $-3\vec{g} -2\vec{h}$ era o vector $\vec{u}$".

A intuição foi observada em muitos outros casos, nomeadamente na construção do paralelogramo da actividade 1 da ficha No 4, onde a generalidade dos alunos escolheu a origem do referencial para vértice do mesmo, tendo sido, deste modo, facilitada a resolução do problema.

O grupo GI3 escreveu o seguinte relatório relativo à actividade 1 da ficha No 5, onde eram pedidos cinco pontos de uma recta que passava por um dado ponto A e tinha uma certa direcção (a de um vector $\vec{u}$, dado):

> "Começámos por traçar o vector $\vec{u}$ e o ponto A. De seguida traçámos a recta r que passava pelo ponto A e era paralela a $\vec{u}$. Depois fizemos a soma do ponto A com o vector $\vec{u}$ e com vectores com comprimentos diferentes obtendo, assim, pontos em diversos locais da recta ...".

Estes alunos poderiam ter resolvido a actividade como o fizeram outros grupos: somavam A com $\vec{u}$ e depois somavam este ponto com o vector $\vec{u}$ e assim sucessivamente; mas não o fizeram, tendo-lhes sido útil na medida em que acabaram por chegar à equação vectorial da recta.

Resoluções criativas e imaginativas também se verificaram ao longo de todo o trabalho com o computador, como por exemplo, as apresentadas pelos grupos GI4 e GI6 no relatório referente à actividade 3 da ficha Nº 4. O grupo GI4 resolveu o problema por via vectorial e de forma criativa. O grupo GI6 utilizou um processo criativo, mas geométrico. Estes alunos construíram a circunferência com centro no ponto médio do segmento de recta [AB] e de raio AM; em seguida intersectaram-na com a recta suporte de [AB].

Um dos momentos mais altos das dez sessões de trabalho com o LOGO.GEOMETRIA aconteceu na resolução da actividade 1 da ficha Nº 7. O problema em causa, "Ensinar o LOGO.GEOMETRIA a medir a amplitude do ângulo de duas rectas", custou a ser resolvido, tendo demorado algum tempo até que os alunos começassem a definir estratégias conducentes à resolução do problema. Um dos grupos (GI3) debatia-se com a maneira de calcular o valor do ângulo pedido a partir do valor do seu coseno. Os alunos ainda não tinham aprendido as funções trigonométricas inversas e por outro lado o LOGO.GEOMETRIA não lhes calculava o valor pretendido. Os alunos do grupo (GI1), que estavam a sentir o mesmo problema, exclamaram em voz alta:

> "Nós já descobrimos, já deu certo!
> Para verificarmos se o valor de cos $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ = 0.3162 estava certo pedimos ao computador o valor de cos 71.565 (71.565 foi-nos dado pelo computador como resposta a ANG.V "u "v) e deu-nos o resultado 0.31612".

Os alunos tornearam o obstáculo com imaginação.

Este facto gerou uma certa discussão com toda a turma, onde foi notória a alegria e satisfação dos elementos do "grupo da descoberta".

Notou-se, ainda, uma certa adaptação das situações, por parte dos alunos, por forma a que estas pudessem ser resolvidas da melhor maneira. O grupo GI3, por exemplo, aquando da resolução da actividade 2 da ficha Nº 6, trabalhou com o vector (50,20) em vez do vector (5,2) dado pelo LOGO.GEOMETRIA. Os alunos consideraram um vector colinear com o vector dado pelo computador, podendo, desta forma, visualizá-lo no monitor (lembre-se que a imagem do vector de coordenadas (5,2) pouco mais seria do que um ponto).

Houve criatividade e recurso à intuição.

Outros Aspectos da Resolução de Problemas

Para resolver um determinado problema, a procura de problemas semelhantes já resolvidos é, para Pólya (1945), um passo importante na invenção de uma estratégia. A própria utilização de resultados anteriores para a construção de novos resultados assume uma importância bastante grande na resolução de problemas.

As actividades propostas aos alunos durante as dez aulas com o computador, embora mantendo uma linha condutora (a do programa oficial do 10º ano de escolaridade), constituiram como que uma sequência independente de aula para aula, pois, entre duas aulas com o computador realizavam-se as aulas regulares da semana. De qualquer das formas, foi notado um certo aproveitamento, por parte dos alunos, de resultados adquiridos por eles, anteriormente, como pode ser visto através do seguinte relato:

> "Começámos por desenhar o ponto A. Como tinhamos concluido numa das actividades anteriores ..." (GI3, ACT2.7).

O sentido estético, do belo, que tanta importância tem para o desenvolvimento da Matemática, pôde ser observado, sob a forma de economia de tempo e de espaço, na resolução que o grupo GI4 apresentou da actividade 1 da ficha de trabalho Nº 8:

> "Em primeiro lugar marcámos os pontos A e B ... depois traçámos uma circunferência com centro nesse ponto.
> O nosso grupo tinha tido outra ideia que era a de traçar um vector ...
> Este caminho iria ser mais longo e demorado" (GI4,ACT1.8).

O engano a que os sentidos, por vezes, nos levam foi observado, claramente, na resolução da actividade 3 da ficha Nº 8 apresentada pelo grupo GI2. Os alunos impuseram uma condição (a divisão por 2) conduzindo a uma circunferência que não era tangente ao eixo dos xx, como era pedido.

> "Marcámos os pontos A e B e fizemos uma paralela ao eixo dos yy passando por A e uma paralela ao eixo dos xx passando por B. O ponto de intersecção das paralelas é o centro da circunferência. Depois vimos a distância da origem a este ponto e dividimos por 2. Depois fizemos a circunferência (ver figura 19)"(GI2,ACT3.8).

Aqui, os alunos foram enganados pelos seus sentidos (e pelos seus conhecimentos geométricos!). Para eles $\overline{OD} = \overline{DC}$. A definição (resolução) do monitor, não tão nítida (ainda!) quanto o papel branco e o lápis, aliada às pequenas dimensões da figura geométrica, não permitiu que os alunos tomassem consciência que uma das circunferências pedidas não era a que eles estavam a construir.

Embora pontualmente, pôde observar-se uma preocupação sobre o aproveitamento de resultados anteriores para a construção de novos resultados, do sentido de economia no tempo e no espaço de resolução de um problema.

Conclusões

Os alunos mostraram uma tendência bastante grande para as resoluções analíticas dos problemas. Em geral todos os problemas foram resolvidos através de estratégias variadas e distintas, tendo sido, algumas delas, originais, intuitivas e criativas. A persistência esteve presente ao longo de todo o trabalho, onde os obstáculos surgidos foram ultrapassados, algumas das vezes, de forma bastante original. Apenas um grupo desistiu de tentar resolver um problema (GA5,ACT2.3). Os alunos interpretaram o erro e as tentativas falhadas como um desafio para melhorar ou alterar a estratégia seguida de modo a chegarem à resolução do problema. O LOGO.GEOMETRIA permitiu, nalguns casos, mais alternativas de estratégias, abrindo todo um leque de possibilidades para além da via analítica, tornando, deste modo, a resolução dos problemas uma actividade mais rica, mais completa, mas mais exigente, pois a imagem pode levar ao engano. Foi o que aconteceu com o grupo GI2, que na resolução da ACT3.8 apresentou uma solução que não satisfazia o enunciado do problema.

O ambiente vivido nestas aulas onde o professor de cada uma das turmas foi um verdadeiro apoio ao trabalho dos alunos, ora esclarecendo as dúvidas que estes apresentavam ora colocando questões ao que os alunos estavam a fazer, contribuiu para que a resolução de problemas tivesse sido uma actividade merecedora do empenho e da motivação dos alunos.

Formulação de problemas

À formulação de problemas é atribuida, nos dias de hoje, e por parte de muitos educadores em Matemática e não só, uma importância bastante grande para a formação dos alunos.

A formulação de problemas acaba por envolver tantos conhecimentos quantos os necessários para a resolução de problemas, embora utilizados de maneira diferente (Greeno, citado por Moreira, 1989, p. 65), o que leva a considerá-la no mesmo pé de igualdade que a resolução de problemas.

Problemas/Exercicios. Se é diminuta, por parte dos alunos das nossas escolas, a actividade de resolução de problemas, muito mais o é a da sua formulação. Os alunos das turmas envolvidas nesta experiência não fugiam a esta regra, reforçando a expectativa acerca da maneira como eles iriam reagir às actividades de formulação de problemas. Que problemas formulariam eles?

Praticamente em todas as actividades de formulação de problemas propostas, surgiram enunciados de simples exercicios. Foi, mesmo, uma tendência bastante significativa.

> "Considere um referencial (O,e,f) e os pontos A(5,0.5) e B(-1,1.5). Calcule as coordenadas do ponto médio do segmento de recta [AB]" (GI4,ACT4.4),
>
> "Determine a equação reduzida da recta r de equação geral $3x + 2y - 5 = 0$" (GI2,ACT5.7),
>
> "Constrói uma circunferência e uma recta definidas, respectivamente pelas equações $x^2 + y^2 - 3x + y + 3 = 0$ e $3x + 2y + 2 = 0$. Calcula a distância do centro da circunferência à recta" (GI1,ACT4.8).

Houve, também, a formulação de exercicios um pouco mais trabalhosos:

> "Considere um ref.o.n. e os pontos M(10,30), N(40,20), O(-50,50) e o vector $\vec{p}(-20,-10)$.
> a) Determine o ponto P tal que $P - M + N = -2\vec{p}$
> b) Determine os pontos médios de [MN], [NO] e [OP]
> c) Determine $\widehat{MO}$" (GI2,ACT3.5).

Para além do facto de se tratar "apenas" de exercícios, eles não estão formulados com o pensamento no LOGO.GEOMETRIA, pois, com ele, a sua resolução seria imediata. Este comportamento dos alunos pode ser explicado pela ordem em que apareceram as actividades de formulação de problemas em cada ficha de trabalho, e pela tendência que os alunos têm pelas resoluções analíticas. A actividade relativa à formulação de um problema era a última a ser proposta em cada ficha de trabalho. Isto deveu-se ao querer-se "dar" o conteúdo programático todo e à necessidade de conciliar as aulas de duas horas com o computador com as outras aulas regulares semanais. Estas condicionantes levaram a que as actividades mais abertas, como as de formulação de um problema, acabassem por ser um pouco penalizadas no cômputo geral de todo o trabalho desenvolvido. O que acabou por acontecer, e muito especialmente com os grupos de alunos com um ritmo de trabalho mais lento, foi a formulação do problema ficar como trabalho para casa. Assim, os alunos formularam, para bastantes casos, o seu problema sem o computador.

Os alunos manifestaram uma grande tendência em formular exercícios para serem resolvidos analiticamente.

<u>Problemas semelhantes a outros já resolvidos</u>. Se a actividade de formular um exercício pode ser considerada como uma tarefa

menos complexa, menos rica e menos completa do que a de formular um problema, esta, porém, aumentará a sua complexidade se o problema a formular não se limitar a ser semelhante a um outro já conhecido.

A formulação de problemas semelhantes a outros já resolvidos, nomeadamente aos propostos nas fichas de trabalho, foi uma prática corrente ao longo destas aulas com o LOGO.GEOMETRIA. Este facto não será de admirar, pois, para além do que atrás foi dito, a actividade que era proposta aos alunos, nas aulas, era a de "Formulação de um problema semelhante ao indicado na ficha de trabalho".

Os alunos que formularam o problema que a seguir indicamos fizeram-no de forma comparativa com o enunciado da actividade anterior (actividade 2 da ficha N$\underline{o}$ 5):

> "Sabendo que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = 1600 calcule a área do rectângulo [ABCD], sabendo que $\overline{AD}$ = 50 m" (GI1,ACT3.5).

Estes alunos entraram em linha de conta com o facto da diagonal de um rectângulo o dividir em dois triângulos rectângulos geometricamente iguais, bem como, apresentaram, como dado, um quadrado perfeito (1600) para facilitar os cálculos. Não se tratou, pois, de uma simples cópia do enunciado apresentado na ficha de trabalho.

Os alunos do grupo GI3 formularam um problema, na actividade 5 da ficha N$\underline{o}$ 7, semelhante ao da actividade 4 da mesma ficha de trabalho:

> "Dados os pontos A(2,3), B(5,0) e C(8,3), verifica que são vértices do mesmo quadrado"(GI3,ACT5.7).

Este problema acaba por não ser tão exigente quanto o que o inspirou, embora tenha obrigado os alunos à feitura de uns pequenos cálculos.

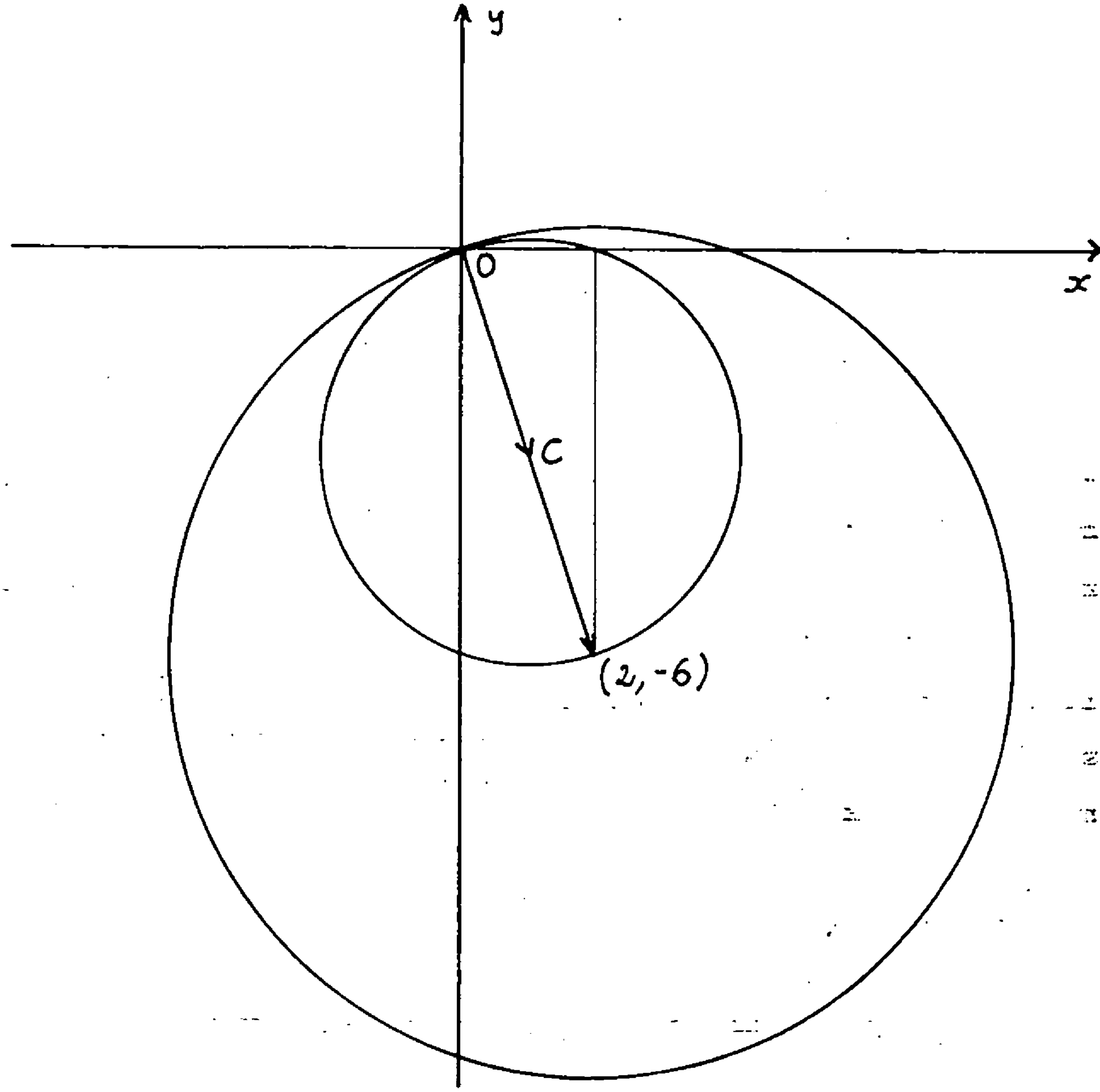
O grupo GI4 formulou o seguinte problema na actividade 4 da ficha No 8:

> "Escreva uma equação da circunferência de raio $2\sqrt{10}$ que é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ na origem do referencial" (GI4.ACT4.8).

Este problema, semelhante ao da actividade 3 da mesma ficha, revela o bastante cuidado que os alunos tiveram na sua elaboração. O valor de $2\sqrt{10}$ não aparece por acaso. O próprio problema que lhe serviu de inspiração foi "ultrapassado" ao serem consideradas duas circunferências em vez de uma circunferência e uma recta. Nota-se, todavia, da parte dos alunos, um raciocínio incorrecto ao considerarem apenas uma das duas circunferências possíveis que são tangentes à circunferência dada na origem do referencial e com raio $2\sqrt{10}$ (aliás, esta lacuna já se manifesta no próprio enunciado "Escreva uma equação <u>da</u> circunferência ..."). Na resolução apresentada pelos alunos (figura 23), pode ver-se, ainda, que o centro da circunferência foi encontrado por via vectorial, dando, deste modo, uma maior dimensão, porque maior diversificação, ao problema que os alunos elaboraram.

Em todas as actividades de formulação de problemas houve alunos que formularam problemas semelhantes aos já resolvidos, embora em todos eles se tenha verificado um cunho pessoal: problemas semelhantes a outros mas não suas cópias.

FIGURA 23



Legenda 23: O centro da circunferência foi encontrado por via vectorial (GI4,ACT4.8).

Imaginação e criatividade. É muito nestas actividades mais abertas, como as de formulação de problemas, que se espera vir a encontrar reflectidas, de forma mais vincada, a imaginação e criatividade de cada um. Nestas actividades é, pois, possível dar azo à imaginação e à criatividade, onde os limites e as restrições impostas são muito menores do que nas actividades mais fechadas.

O grupo GI3, na actividade 4 da ficha Nº 8, apresentou o seguinte problema:

> "O segmento de recta [AB] com A(4,1) e B(6,3) é uma corda da circunferência 1 e C(3,6) é o ponto de tangência da recta paralela ao eixo dos xx com a circunferência 2. Sabendo que o centro das duas circunferências é o mesmo, determine-o, bem como as próprias circunferências"(GI3,ACT4.8).

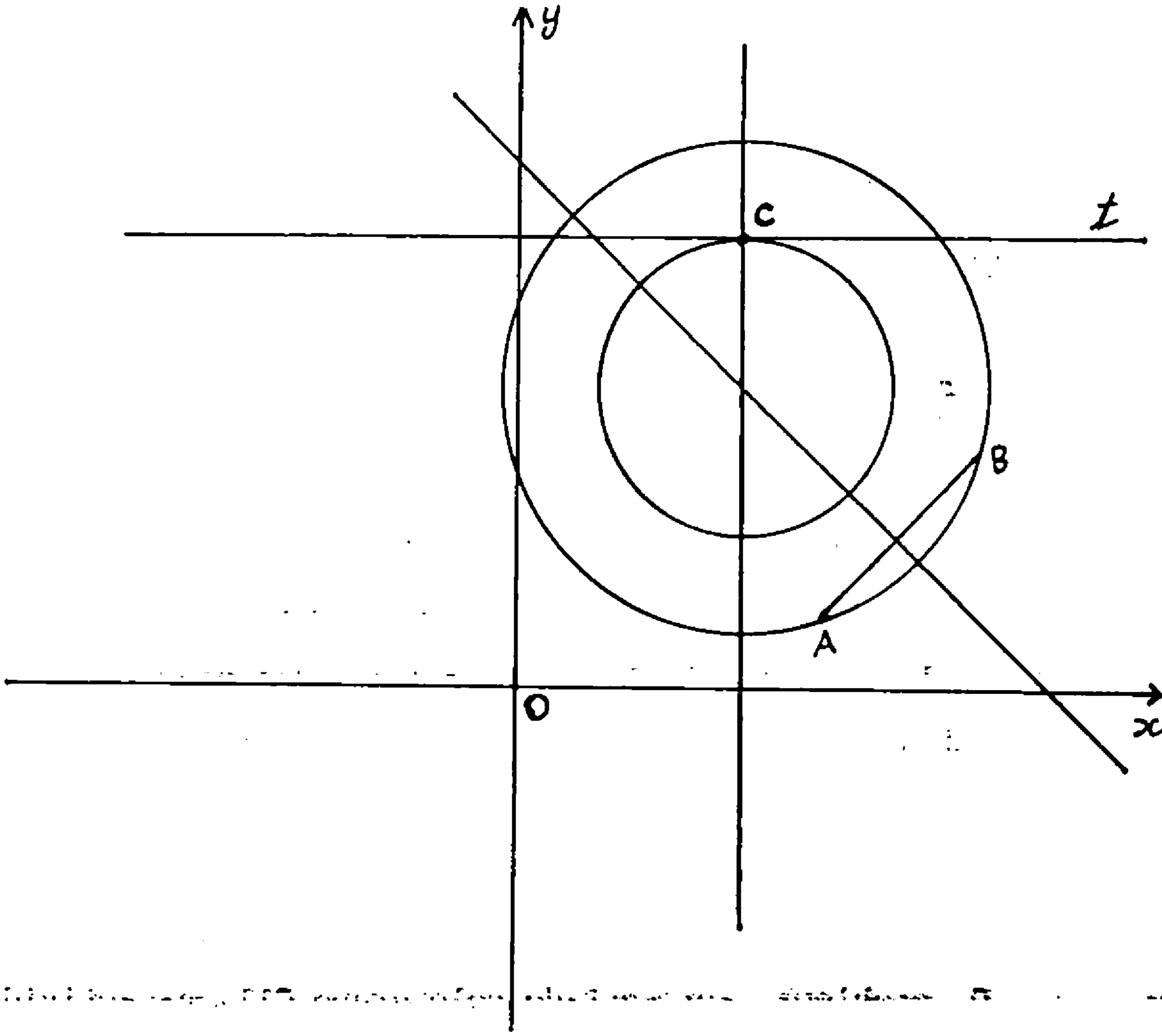
A resolução apresentada pelos alunos pode ser vista na figura 24. Trata-se de um problema cuja resolução é facilitada pela construção geométrica. À medida que se vão construindo os dados do problema vai-se ficando com uma ideia mais clara do que se pede. A figura resultante acaba por estética e agradável à vista. Estão em jogo conceitos como o de circunferências concêntricas; o de mediatriz de um segmento de recta e o da pertença do centro de uma circunferência à mediatriz de uma sua corda.

O problema apresentado pelo grupo GI1, na actividade 3 da ficha Nº 7, foi o seguinte:

> "Escolha-se uma recta ao acaso, por exemplo, a recta de equação $x/3 + y/2 = 1$. Escreva a equação geral da recta. A partir desta equação determine a equação da família das rectas perpendiculares à recta escolhida" (GI1,ACT5.7).

Estes alunos fizeram uma recriação do problema 3 da mesma ficha de trabalho. Os alunos levaram em linha de conta aquele

FIGURA 24



Legenda 24: Os alunos para formularem este problema tiveram que ter presentes os conceitos de circunferências concêntricas, de mediatriz de um segmento de recta e o da pertença do centro de uma circunferência à mediatriz de uma sua corda (GI3,ACT4.8).

problema e fizeram uma sua extensão, revelando uma certa perspicácia, imaginação e um certo espírito matemático.

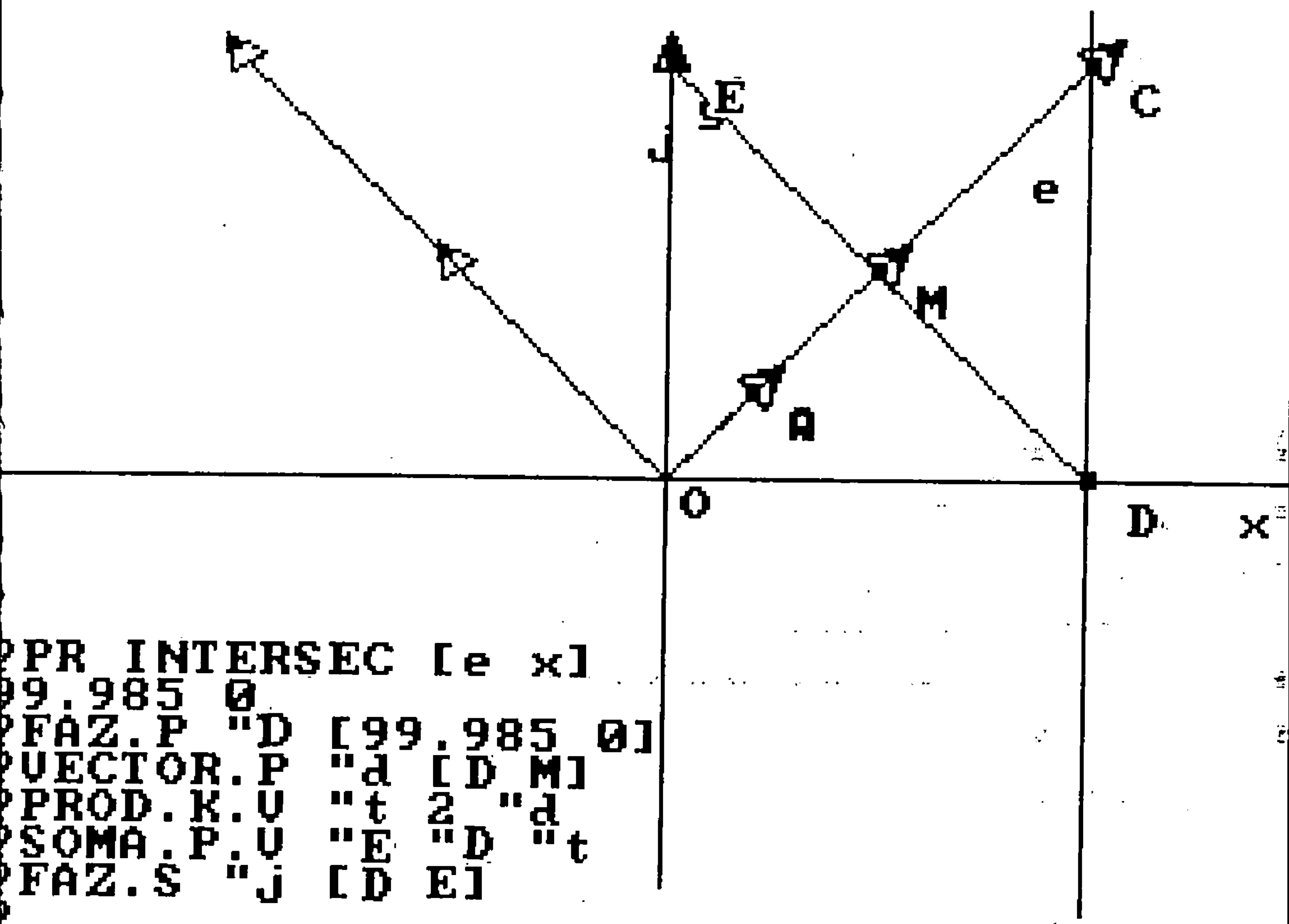
Um outro enunciado que, para além de englobar vários conceitos matemáticos (produto de um escalar por um vector; soma de um ponto com um vector; projecção ortogonal de um ponto sobre uma recta e ponto médio de um segmento) se presta a ser resolvido com o LOGO.GEOMETRIA, foi apresentado pelo grupo GI5:

> "Dados os pontos O(0,0) e A(20,20) e o vector $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, constrói dois segmentos de recta com o mesmo ponto médio, sabendo que $\|\vec{s}\| = \overline{OC}$ e $\vec{s} = 5\vec{v}$ e que t, um dos segmentos, tem origem no ponto D que é a projecção ortogonal de C sobre o eixo dos xx"(GI5,ACT4.4).

A resolução apresentada pelos alunos pode ser vista na figura 25. Este problema, incorporando vários conceitos matemáticos, essencialmente sobre vectores (revela um bom acompanhamento, por parte dos alunos, dos assuntos tratados nas aulas, à data), aproveitando bastante bem as capacidades do computador e do programa LOGO.GEOMETRIA.

Nesta experiência foi bastante visível a imaginação e a criatividade dos alunos, tendo-lhes sido possível aliá-las aos seus conhecimentos de Geometria Vectorial e Analítica.

<u>Problemas com falta de dados para a sua resolução</u>. A formulação de um problema exige, da parte de quem o formula, um domínio de diversos conceitos, sob pena de provocar falhas tais como a de falta de dados. Ao longo de todas estas dez aulas com o computador, apenas se verificou um caso em que os dados apresentados pelos alunos se revelaram insuficientes para a resolução do problema formulado. Foi na resolução da actividade 3 da ficha Nº 5, onde os alunos do grupo GI2, mostraram não ter interioriza-



Legenda 25: A formulação deste problema teve em conta as potencialidades geométricas e vectoriais do LOGO.GEOMETRIA (GI5,ACT4.4).

do, ainda, o conceito de produto interno de dois vectores. O enunciado formulado foi o seguinte:

> "Uma firma está interessada na aquisição de uma propriedade que tem a forma de um triângulo isósceles. Sabe-se que $\vec{AB} = 40$ e $\vec{AB}.\vec{BC} = 2000$.
>
> Quanto custa a propriedade sabendo que cada m^2 de terreno é vendido por 1000 escudos?(ver figura 26)". (GI2,ACT3.5)

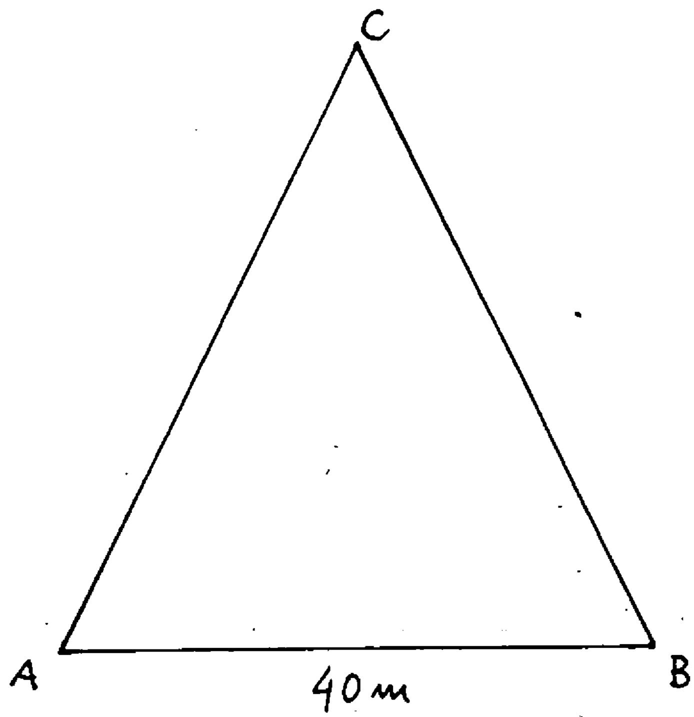
Este problema, semelhante ao da Actividade 2 da mesma ficha de trabalho, foi resolvido pelos alunos considerando o produto interno dos dois vectores como sendo igual ao produto das suas normas ($\vec{AB}.\vec{BC} = \|\vec{AB}\|.\|\vec{BC}\|$), desprezando por completo a medida dos ângulos internos do triângulo. O curioso é que estes alunos resolveram correctamente a actividade 2 da ficha N<u>o</u> 5, recorrendo à relação $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos (\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v})$. Tratou-se de um esquecimento? Foi uma formulação feita à pressa? Ou foi mesmo por desconhecimento do que é o produto interno de dois vectores, evidenciado pela actividade de formulação de problemas?

Conclusões

Os alunos manifestaram uma certa tendência para formular exercícios e pela resolução analítica dos mesmos.

Muitos dos problemas formulados eram semelhantes a outros já resolvidos. Este facto deveu-se não só à menor exigência para a sua formulação mas, e principalmente, à forma como o enunciado das actividades das fichas de trabalho fora elaborado, "Formula um problema semelhante ao indicado na Ficha de Trabalho". Notou-se, mesmo assim, em muitos dos problemas formulados a introdução de componentes muito pessoais, podendo-se afirmar que

FIGURA 26



Legenda 26: Este problema foi formulado tendo por base uma incompreensão do conceito de produto interno de dois vectores (GI2,ACT3.5).

eram problemas semelhantes a outros mas claramente diferentes deles.

Durante este trabalho houve a formulação de problemas originais e imaginativos, onde os conceitos matemáticos foram aliados à resolução geométrica e vectorial, com a utilização do LOGO.GEOMETRIA.

A Compreensão da Necessidade e da Utilidade das Demonstrações

Nas actividades de ensino/aprendizagem que serviram de base a este trabalho pretendeu-se criar um fio condutor que levasse os alunos a sentir a utilidade e a necessidade de uma prova, de uma demonstração. A estratégia definida passou pelo pedido escrito de verificações de situações que pareciam evidentes, imediatas, pelo desafio da descoberta de leis e relações matemáticas e pelo pedido de explicação e justificação de factos e de fenómenos matemáticos em jogo. Esta estratégia foi complementada pela intervenção oral do professor mantida ao longo das dez semanas de trabalho onde as perguntas "então e isso é válido para todos os casos?", e "parecer parece, mas será mesmo?" surgiram com bastante frequência nas aulas com o computador.

Provas Visuais

Os alunos envolvidos nesta experiência com o LOGO.GEOMETRIA manifestaram, na sua globalidade e inicialmente, uma tendência muito grande para a aceitação da evidência das figuras.

"Isso vê-se logo", afirmaram os alunos, de ambas as turmas, aos professores quando estes os abordaram para se inteirarem do andamento da resolução das actividades da ficha de trabalho Nº 1. Os alunos tinham a convicção que estavam a resolver correctamente as actividades e eram apoiados, nesta sua convicção, pelo que o "écran" do monitor lhes mostrava. Foi devido à colocação da dúvida, por parte dos professores, que os alunos foram fazer a verificação, tendo, para tal, recorrido aos procedimentos CONTEUDO e COINCID?. O LOGO.GEOMETRIA, mais uma vez, se mostrou útil na obtenção de respostas rápidas e fiáveis.

Na aula onde foi resolvida a actividade 1 da ficha Nº 3, todos os alunos, de ambas as turmas, disseram que a decomposição do vector $\vec{u}$ na base $(\vec{e},\vec{f})$ era única. Recorde-se que este assunto ainda não tinha sido tratado nas aulas sem computador. A explicação dada, com a excepção do grupo (GI6) que analisaremos na página 210 por se tratar de uma prova mais completa, foi do seguinte teor:

> "... Pela regra do paralelogramo verifica-se que o vector soma $(3\vec{e} + 2\vec{f})$ vai dar no vértice do paralelogramo" (GA1 e GA5);

> "... Para provar fizemos o paralelogramo e traçámos a sua diagonal. Por isso é impossível traçar uma diagonal equivalente com outras coordenadas" (GI1);

> "Não é possível pois iríamos ter vectores diferentes" (GA2);

> "É impossível visto que na mesma base só as mesmas constantes poderão encontrar o mesmo vector" (GI2).

Estes alunos socorreram-se de uma verdade já demonstrada, a regra do paralelogramo, para provar a sua proposição. Trata-se de uma prova visual onde estão incorporados conhecimentos adquiridos que validam a proposição inicial. Porém, como responderiam estes alunos à pergunta no caso do vector u ser colinear com um dos vectores da base? Estariam em condições de generalizar a prova dada para este caso? A prova visual apresentada não permite tirar conclusões relativamente a esta pergunta.

Uma outra resposta que, para além de incorporar a regra do paralelogramo, leva em linha de conta a própria noção de combinação linear, foi a seguinte:

> "Concluímos que não poderiamos decompôr $\vec{u}$ na base $(\vec{e},\vec{f})$ com uma outra combinação linear. Isto porque, embora havendo hipóteses com outra combinação linear de resultar um vector com a mesma direcção e sentido de $\vec{u}$ ele teria intensidade diferente" (GI3).

Não é difícil de imaginar o quão viva deverá ter sido a aula seguinte, sem computador, onde todos os grupos tinham coisas para dizer e onde a unicidade da decomposição de um vector numa dada base foi formalizada.

Um obstáculo à emergência do problema da prova pode ser a força da evidência. Terá sido este o factor que determinou as respostas dadas pelos alunos? Aliás, a força da evidência manifestou-se, ainda, na resolução da actividade 1 da ficha N<u>o</u> 5, que só já foi resolvida pelos alunos da turma de Informática. Quatro dos oito grupos nada relataram sobre a verificação da pertença à recta dos pontos que estavam a construir. Os alunos acreditaram no caminho que estavam a seguir, bem como na imagem que iam obtendo no "écran" do monitor.

Na actividade dois da ficha N<u>o</u> 6, todos os grupos explicitaram a relação de igualdade entre os declives das três rectas paralelas. Apesar de se estar na oitava aula com o computador houve, ainda, um grupo que justificou a relação com base na igualdade das coordenadas dos vectores directores, um de cada recta, que o LOGO.GEOMETRIA lhes deu (note-se que o LOGO.GEOMETRIA constrói o mesmo vector director para cada família de rectas paralelas),

> "Começamos por traçar três rectas paralelas entre si e através do comando DECLIVE verificámos que os declives das rectas eram iguais... logo, tendo os vectores directores as mesmas coordenadas, os declives das respectivas rectas são iguais" (GI7,ACT2.6).

Estes alunos "apenas" leram o que lhes apareceu no "écran", não tendo sentido a necessidade de analisar se o que estavam a observar seria válido para o caso dos três vectores directores não serem os mesmos, por exemplo. Ficaram-se pela constatação dos resultados que o computador lhes apresentou. Foi a evidência dos factos a ser um obstáculo à prova?

Inicialmente, os alunos, de ambas as turmas, satisfizeram-se com a evidência proporcionada pelas imagens servindo-se delas como uma prova "cega" de validação. As provas visuais não foram muito utilizadas pelos alunos.

Generalizações

Através da experimentação para um ou vários casos pode-se conjecturar uma lei geral válida para todos eles. Porém, à convicção há que juntar a razão convincente de uma prova que convença da veracidade da proposição.

Os alunos da turma de Agricultura satisfizeram-se com a descoberta de uma lei matemática com base nos poucos casos experimentados e nas relações encontradas para eles. Estes alunos generalizaram interiormente para si as relações para todos os casos, mas nem sequer as explicitaram, embora as utilizassem em situações diferentes como leis provadas e demonstradas. Apenas um grupo apresentou o relatório da actividade 4 da ficha N$\underline{o}$ 3. Este facto deveu-se ao muito tempo que os alunos desta turma demoraram a resolver a actividade 3 da mesma ficha de trabalho. O relatório apresentado foi o seguinte:

> "Construímos em primeiro lugar os pontos M, B, A com as respectivas coordenadas. Desenhamos, em seguida, os vectores $\vec{e}$ e $\vec{f}$ e os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. As coordenadas do vector soma destes resultam da soma das coordenadas dos vectores parcelas" (GA4,ACT4.3).

Esta resposta, conjuntamente com as apresentadas para a actividade 2 da ficha N$\underline{o}$ 4, que a seguir se indicam, são comprovativas do que atrás foi dito:

> "Começamos por construir os pontos A e B, os extremos do segmento de recta s, ... , depois pedimos as coordenadas do ponto médio de s e obtivemos (40,50) como nos era dado no enunciado. Considerámos outro segmento de recta t com extremos C(-130,80) e D(20,50). Fizemos (-130 + 20) / 2 e (80 + 50) / 2 tendo obtido -55 e 65 respectivamente. Pedimos ao computador as coordenadas do ponto médio de t e obtivemos (-55,65). O nosso raciocínio está certo."(GA1,ACT2.4);

> "Desenhámos os extremos do segmento s, A(100,30) e B(-20,70). Descobrimos o ponto médio de s a partir da sua mediatriz e as suas coordenadas são (40,50). Estes valores são metade de 100 + (-20) e 30 + 70 respectivamente."(GA4,ACT2.4).

Estas relações foram utilizadas na resolução da actividade seguinte, como se tratassem de verdades provadas e irrefutáveis.

Foi pena que os alunos desta turma apenas tivessem resolvido seis das dez fichas de trabalho (as duas de introdução ao LOGO.GEOMETRIA e as quatro seguintes), pois teriam, decerto, sentido mais a necessidade de responder à questão "da validade para todos os casos" da relação encontrada para os casos concretos.

Os alunos da turma de Informática, na sua maioria, generalizaram através de processos que a seguir são indicados, mostrando como foram evoluindo com o correr do tempo:

> "... somando o vector $\vec{v}$ com o vector $\vec{u}$ obtivemos o vector $\vec{z}$. Podemos, portanto, concluir que a soma de dois vectores não é mais que a soma das coordenadas da mesma espécie dos vectores parcelas, acontecendo isto em todos os casos"(GI3,ACT4.3).

Após terem considerado três segmentos de recta (ver figura 27) os alunos do grupo GI6 escreveram no seu relatório referente à actividade 2 da ficha de trabalho No4:

> "... podemos concluir que, para acharmos as coordenadas do ponto médio de um segmento de recta, somamos as abcissas dos extremos e dividimos por 2; fazendo o mesmo com as ordenadas"(GI6,ACT2.4);

No relatório da actividade 2 da ficha No 6 o grupo GI5 escreveu:

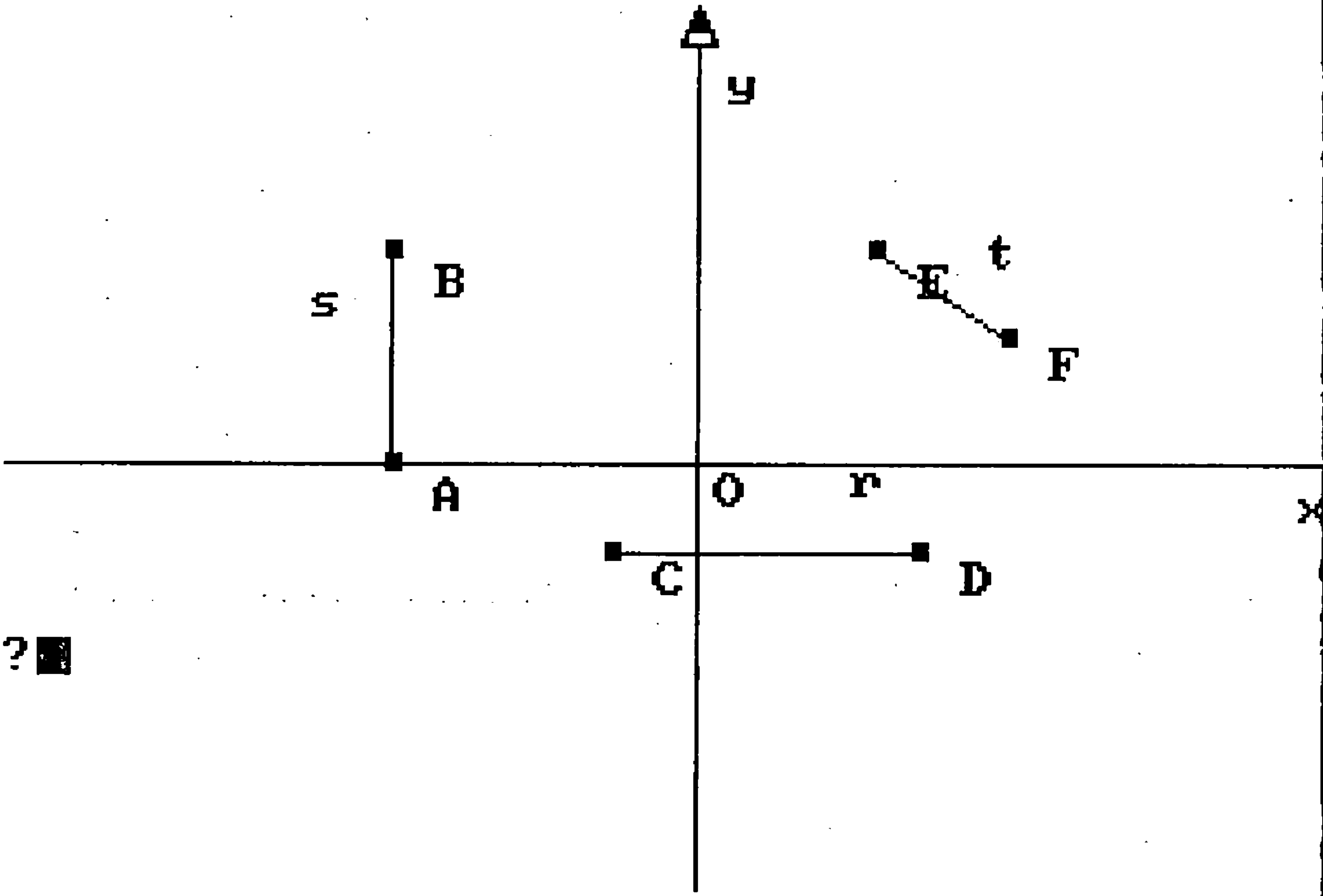
> "Fomos construir três rectas paralelas entre si. R.ACASO "r para a primeira e PARAL para as outras. Depois perguntámos ao computador quais os seus declives e ele deu-nos para todas o mesmo valor. Daí concluímos que rectas paralelas têm sempre o mesmo declive. Um exemplo disto é se considerarmos um vector director de uma das rectas e dividirmos a sua ordenada pela abcissa obtemos o declive da recta e como o vector director de uma das três rectas paralelas é o mesmo das outras duas (ou pelo menos colinear), podemos concluir que o quociente da ordenada pela abcissa terá de dar o mesmo valor"(GI5,ACT2.6);

O grupo GI4 relatou o seguinte sobre a resolução da actividade 3 da ficha No 6:

> "Começámos por desenhar a recta r ao ACASO. De seguida fizemos um ponto ao ACASO e por ele fizemos passar uma recta s perpendicular a r. Pedimos os declives de ambas as rectas e depois de os multiplicarmos e repetirmos a operação duas vezes concluímos que o resultado era sempre -1. Pelo que retirámos do exercício vemos que m.m'=-1. Para demonstrar ..."(GI4,ACT3.6).

Apenas o grupo GI1, e na resolução da actividade 3 da ficha

FIGURA 27



Legenda 27: A conjectura foi feita com base em três casos considerados (GA4,ACT4.3).

nº 6, não explicitou a generalização, como pode ser visto pelo seu relatório:

> "Começámos por fazer uma recta r ao ACASO e um ponto E com as coordenadas (60,40) e fizemos passar por ele uma recta g perpendicular a r. Calculámos os declives das rectas e multiplicámos um pelo outro e deu-nos -1. Fizemos o mesmo para outras duas rectas perpendiculares e obtivemos o mesmo resultado"(GI1,ACT3.6),

e o grupo GI8 não deixou claro se estava a generalizar para todos os casos ou apenas para os casos experimentados:

> "Depois de fazermos o que nos foi pedido podemos tirar uma conclusão muito importante: o quociente da ordenada pela abcissa é igual ao declive"(GI8,ACT1.6).

Como se pode observar pela amostra representativa de excertos de relatórios atrás apresentados, os alunos desta turma, a partir da sétima aula com computador, começaram a fazer as suas experimentações para casos aleatórios fornecidos pelos construtores ACASO do LOGO.GEOMETRIA. Os alunos passaram a generalizar a partir da análise destes casos aleatórios, destes exemplos genéricos. Dois destes grupos chegaram mesmo a fazer uma demonstração da conjectura a que chegaram.

Testagem

Partindo da experimentação para um ou vários casos pode-se avançar para um modelo. A intuição diz que a proposição conjecturada é verdadeira. Mas sê-lo-á?

A tomada de consciência da insuficiência da verificação inicial sobre alguns exemplos de que se partiu para a conjectura, levando a ir verificar, ainda, para um outro caso, marca um passo importante quanto à validação da sua generalização feita. Trata-se de uma resposta empírica que fundamenta a convicção de certos alunos.

Nas propostas de trabalho fornecidas aos alunos insistiu-se bastante na testagem das conjecturas. Isto deveu-se ao facto de se pensar, por um lado, que os alunos se iriam satisfazer com a descoberta das relações em jogo a partir da experimentação para um ou vários casos e, por outro lado, a intenção de elevar a exigência dos alunos quanto à validação de uma proposição. Seria como que "obrigar" os alunos a uma passagem transitória da veracidade da generalização feita para alguns casos, para uma prova para todos os casos.

Os alunos que testaram as suas conjecturas satisfizeram-se com a testagem para validar a proposição, não tendo desenvolvido uma demonstração para tal. Os alunos que apresentaram uma demonstração partiram para ela sem terem testado a conjectura a que tinham chegado.

Destacam-se os seguintes relatórios representativos dos alunos do primeiro grupo:

> "... depois da recta construída calculámos o seu declive (0.4). Depois construímos um vector director da recta e calculámos as suas coordenadas (-99.996,-40)... a divisão da ordenada pela abcissa do vector director deu-nos o valor do declive da recta.
> Para nos certificarmos que era assim para qualquer recta construímos uma recta ao acaso e procedemos do mesmo modo, ..., o que também nos deu igual" (GI1,ACT1.6),

"FAZ.R.EQG "r [2 -5 200]
PR DECLIVE "r -----> 0.4
A partir das coordenadas de um vector director da recta dividimos a ordenada pela abcissa e deu-nos 0.4 e concluímos que o declive de uma recta é dado a partir das coordenadas de um vector director da seguinte forma ordenada / abcissa.

Para nos certificarmos fizemos uma recta ao ACASO e desenhámos o seu vector director e recorremos aos mesmos procedimentos e deu-nos que o declive era igual à ordenada / abcissa.

Isto verifica-se para todos os casos" (GI2,ACT1.6).

Para estes alunos, a veracidade da proposição foi-lhes garantida, para além do caso inicial, pela confirmação da relação para o caso genérico que eles consideraram. Para eles, este exemplo genérico teve a força duma validação total para a relação encontrada.

O grupo Gi6 elaborou o seguinte relatório referente à actividade 3 da ficha N<u>o</u> 6:

"... o produto do declive das duas rectas perpendiculares é igual a -1. Voltámos a fazer duas rectas perpendiculares e também nos deu -1. Mas não podemos concluir se dará para todos os casos" (GI6,ACT3.6).

<u>Demonstrações</u>

Uma demonstração, como prova intelectual que é, assenta na análise das propriedades dos objectos em jogo e não é um resultado directo da experiência. Neste tipo de prova, a acção é interiorizada.

O contexto social desempenha um papel fundamental para a validação e comunicação dos processos de prova. Por outro lado, é preciso que a responsabilidade da verdade na aula seja transferida do professor para os alunos, de modo que estes reconheçam e vivam a demonstração como um verdadeiro meio de prova.

Até que ponto foram importantes as discussões em grupo, as discussões entre cada grupo e o professor e, nalguns casos, as discussões entre toda a turma e o professor, para o aparecimento de provas? O envolvimento dos alunos num processo de validação das conjecturas que foram descobrindo ficou-se a dever à presença do computador? Que papel terá desempenhado o facto dos alunos passarem a ter consciência que um mesmo problema podia ser resolvido por mais de um processo, muitos dos quais desconhecidos do próprio professor, porque originais e diferentes, obrigando a que este os analisasse conjuntamente com os alunos, de modo a validá-los?

O grupo GI6 apresentou a seguinte resposta, no seu relatório da actividade 1 da Ficha Nº 3:

" $\vec{u} = a1\,\vec{e} + b1\,\vec{f}$ e $\vec{u} = a2\,\vec{e} + b2\,\vec{f}$
$\vec{u} = \vec{u} \Leftrightarrow a1\,\vec{e} + b1\,\vec{f} = a2\,\vec{e} + b2\,\vec{f}$
$\Leftrightarrow (a1\,\vec{e} - a2\,\vec{e}) = (b2\,\vec{f} - b1\,\vec{f})$
$\Leftrightarrow (a1 - a2)\,\vec{e} = (b2 - b1)\,\vec{f}$
$\Leftrightarrow \vec{e} = (b2 - b1) / (a1 - a2)\,\vec{f}$
Se $a1 \neq a2$ vem $\vec{e} = k\,\vec{f}$, com $k \in \mathbb{R}$ e
$k = (b2 - b1)/(a1 - a2)$
Então $a1 = a2$
De $(a1 - a2)\,\vec{e} = (b2 - b1)\,\vec{f}$ vem
$\vec{f} = (a1 - a2) / (b2 - b1)\; e \Leftrightarrow b2 - b1 = 0$
$\Rightarrow b2 = b1$, logo, u na base (e,f) tem uma decomposição única" (GI6,ACT1.3).

Como se pode observar, os alunos não fazem a ligação do resultado $a1 \neq a2$ para a relação $b1 = b2$. De facto, se já sabemos que $a1 \neq a2$ então porque é que tem de ser $b1 = b2$? Não seria de admitir que $b1 - b2 \neq 0$? Os alunos aplicaram mecanicamente o raciocínio que haviam feito para chegar à relação $a1 = a2$.

Da observação da aula pode-se dizer que neste grupo de alunos foi sentida a necessidade de provar a unicidade da decomposição linear. Pretendia-se mais do que a regra do paralelogramo, do que essa prova visual. Neste sentido houve uma certa insistência junto do professor quer com perguntas quer com pedido de pistas de demonstração. O professor sugeriu-lhes que partissem do princípio que o vector u era decomponível em duas combinações lineares diferentes e, depois, tentassem concluir que isso não era possível. Os alunos agarraram a sugestão, mas como atrás se viu, com alguma inconsistência. Para os alunos a demonstração tinha sido feita. Eles passaram mesmo para a actividade seguinte sem precisar de discutir com o professor o que haviam feito. Bastou-lhes a confiança na pista de trabalho dada pelo professor e no desenvolvimento que eles lhe deram.

Este desejo, esta necessidade de demonstrar surgiu, quanto a nós, muito da forma como foi conduzido o trabalho, e muito particularmente como foi conduzida esta aula da resolução da ficha Nº 3:

"A decomposição é única", afirmaram todos os alunos. "Porquê?", perguntou o professor. "E se fosse outro vector que não o u, isso também aconteceria?", voltou a perguntar o professor. "Também", disseram os alunos. "E podemos experimentar para todos os casos?", perguntou o professor de novo.

Este diálogo foi estabelecido entre o professor e cada um dos grupos (um de cada vez). Foi um diálogo que provocou a curiosidade intelectual de alguns alunos e que os levou a "exigir" uma demonstração. Foram eles que quiseram demonstrar. Foram eles que fizeram a demonstração (embora muito validada pela sugestão inicial do professor). De qualquer das formas tratou-se duma situação bastante diferente da normal, onde o professor expõe a demonstração e os alunos vão (quando vão) acompanhando.

Os três grupos GI2, GI4 e GI5 apresentaram nos seus relatórios referentes à actividade 2 da ficha 4, uma demonstração (não pedida no enunciado) da relação a que tinham chegado entre as coordenadas do ponto médio de um segmento de recta e as coordenadas dos seus pontos extremos. Esta exigência surgiu, talvez, muito como consequência do estilo de trabalho que foi seguido, onde a pergunta "E isso é válido para todos os casos?" era muito frequente por parte do professor.

> "O sôtor, como é que poderíamos demonstrar que esta relação é sempre válida qualquer que seja a situação?",

perguntaram os alunos do grupo GI2 ao professor. Os alunos acreditavam que a relação se mantinha sempre, quaisquer que fossem os segmentos de recta considerados, mas queriam validá-la, queriam fazer uma prova, uma demonstração. O professor deu um "empurrãozinho", "Então, considerem o ponto médio do segmento genérico [AB] como tendo coordenadas genéricas (a,b) e depois, utilizando os vossos conhecimentos sobre vectores logo lá chegarão". O que os alunos escreveram no relatório foi o seguinte:

> " $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ <=> M - A = B - M <=>
> (a,b) - (x1,y1) = (x2,y2) - (a,b) <=>
> (a - x1, b - y1) = (x2 -a, y2 - b) <=>
> a - x1 = x2 - a ^ b - y1 = y2 - b <=>
> a = (x1 + x2) / 2 ^ b = (y1 + y2) / 2 "
> (GI2,ACT2.4).

Os relatórios dos outros dois grupos foram bastante semelhantes a este.

A situação vivida nesta aula revelou que estes três grupos de alunos exigiram uma prova convincente para validar, para dar mais força à sua convicção, à sua certeza relativamente à relação em causa. Por outro lado, pudemos constatar que estes alunos não foram capazes de fazer a demonstração sem o "empurrão do exterior". O que teria acontecido se não tivesse existido esta ajuda? O que fariam os alunos? Desistiriam ou persistiriam até conseguirem encontrar uma prova que os satisfizesse? A actuação do professor foi mais um obstáculo ao desenvolvimento de um processo de prova próprio, autónomo ou foi mais um motor? Teria sido preferível uma não intervenção do professor? E o factor tempo? Teriam, os alunos, sido capazes de completar a resolução da ficha de trabalho se tivessem continuado a insistir sózinhos na prova da relação encontrada?

Na segunda actividade da ficha de trabalho Nº 6 era pedido, aos alunos, que encontrassem uma relação entre os declives de três rectas paralelas. Foram apresentados relatórios onde se denota, já, uma grande preocupação dos alunos em justificar tudo o que escrevem e as conclusões a que vão chegando.

> "Depois de construirmos as rectas r, s e t paralelas entre si, pedimos os seus declives ao computador e deu-nos para todas elas o mesmo valor, 7.692. Para justificar fizemos para todas elas um vector director, que por (talvez) preguiça do computador, deu-nos o mesmo valor para as três rectas (-1.29996, -9,998). Depois de dividirmos a ordenada pela abcissa verificámos que realmente as rectas tinham como declive 7.692.
> Mesmo que o computador desse três vectores directores diferentes, eles seriam colineares de certeza, pois as rectas r, s e t são paralelas, e então a divisão das ordenadas pelas abcissas respectivas dariam o mesmo valor, 7.692" (GI1,ACT2.6).

Estes alunos "fizeram contas sem as fazer" ao considerarem três vectores diferentes, genéricos, que não estavam a visualizar directamente no "ecran" do monitor, mostrando que interiorizaram a noção de vector director de uma recta bem como a de direcção. A passagem desta prova para uma demonstração, onde fossem aplicadas leis gerais conhecidas a três rectas paralelas quaisquer com a utilização da linguagem própria da Matemática, não foi feita pelos alunos. Todavia, a resposta apresentada com cálculos que não resultaram directamente da experiência que os alunos estavam a ter, mas sim de conceitos e relações já provadas anteriormente, é reveladora de se tratar de uma prova do nível intelectual. O LOGO.GEOMETRIA desempenhou o papel de suporte visual na construção das três rectas e, ainda, de auxiliar de cálculo ao apresentar as coordenadas dos vectores directores pedidos. Desta forma o LOGO.GEOMETRIA permitiu um ganho de tempo que foi aproveitado pelos alunos para pensarem nos porquês da relação encontrada.

O mesmo se poderá dizer do grupo GI3 que escreveu no seu relatório:

> "Os declives de rectas paralelas são iguais pois elas se são paralelas formam o mesmo ângulo entre si (0^o) e com quaisquer outras rectas (caso do eixo das abcissas)" (GI3,ACT2.6).

Estes alunos mostram estar na posse de uma noção clara de direcção e de declive de uma recta. A validação feita por estes alunos é baseada em relações e conceitos, e não nestas ou naquelas rectas específicas.

Na actividade 3 desta mesma ficha de trabalho era desejado que os alunos chegassem à relação entre os declives de duas rectas perpendiculares, "exigindo-se" uma demonstração dessa relação a descobrir. O grupo GI5 não teve tempo de trabalhar esta actividade (gastou-o todo com as duas primeiras), os restantes grupos enunciaram a relação pretendida e só os grupos GI4 e GI8 apresentaram uma demonstração. O processo que seguiram foi o mesmo e coincide com o apresentado no livro de texto adoptado. Já seria do conhecimento destes alunos? O grupo GI8 apresentou um relatório muito sintético, aliás, como era seu hábito. O grupo GI4 escreveu:

> "... vimos que $m.m' = -1$. Para demonstrar temos que $r \perp s$, $y = mx + b$ e $y = m'x + b'$. Passámos estas equações reduzidas para as equações gerais e ficou $mx-y+b=0$ e $m'x-y+b'=0$. Determinámos os seus vectores directores e vem que são paralelos à sua recta, $\vec{u}//r$ e $\vec{v}//s$, portanto, se são paralelos às rectas e se as rectas são perpendiculares entre si, também os vectores são perpendiculares, $\vec{u} \perp \vec{v}$.
> $\vec{u}(1,m)$ e $\vec{v}(1,m')$ portanto $\vec{u}.\vec{v}=0$ <=>
> $(1,m).(1,m')=0$ <=> $1+m.m'=0$ <=> $m.m'=-1$" (GI4,ACT3.6).

Estes alunos mostraram preferir a equação geral da recta para encontrarem um seu vector director. A explicação talvez se deva ao facto da relação, declive de uma recta / coordenadas de um seu vector director, apenas ter começado a ser abordada na presente aula. Mesmo que a demonstração pudesse ser já do seu conhecimento, por este relato ressalta, todavia, a existência de um cunho muito pessoal: "passámos", "determinámos", "e vem que são paralelos à sua recta", o que leva a crer que estes alunos viveram e sentiram o que escreveram. Embora podendo ter vindo do exterior, esta demonstração foi filtrada, foi criticada, foi validada pelos alunos por um processo vivo e activo.

Alguns alunos, e à medida que as aulas foram decorrendo, motivaram-se para a feitura de demonstrações, tendo chamado a si grande parte da responsabilidade da sua elaboração e validação.

Na maioria dos casos o desenvolvimento dos processos de prova nasceram nos muitos diálogos havidos entre o professor e os grupos de alunos.

A validação, por parte dos alunos, das provas elaboradas por si, assentou na confiança naquilo que o professor dizia, bem como nos próprios processos por eles desenvolvidos.

Conclusão

Notou-se uma evolução, por parte de muitos dos alunos, quanto à maneira de encarar as figuras, as imagens. Inicialmente, aos alunos, de ambas as turmas, bastava o que viam no "écran" do monitor para validar as proposições.

Os alunos da turma de Agricultura ao terem resolvido apenas seis das dez fichas de trabalho acabaram por não desenvolver muito a sua capacidade de elaboração e de crítica de provas e de demonstrações.

Os alunos da turma de Informática, e a partir da sétima aula com o computador, começaram a fazer as suas experimentações para casos aleatórios através dos construtores ACASO do LOGO.GEOMETRIA. Estes alunos passaram a generalizar a partir da análise destes casos aleatórios. Neste processo, a existência do LOGO.GEOMETRIA revelou-se de uma importância enorme. O computador foi a bancada de trabalho onde eram lançados os primeiros dados e feitas as primeiras observações, tendo permitido novas experiências que facilitaram a descoberta de conjecturas e, nalguns casos, a sua testagem. Claro que, a presença do computador não evitou que, para alguns alunos, a conjectura se validasse pela sua "simples" enunciação.

À medida que as aulas foram decorrendo começou a ser interiorizada, por bastantes alunos, uma necessidade de demonstrar as afirmações feitas. Era como que uma obrigação, um dever sentido e desejado. Era mesmo um desafio, porque se sabia que não era, na maior parte das vezes, tarefa fácil. Houve como que uma frutificação da argumentação racional desenvolvida ao longo da experiência.

O professor foi um elemento chave para o desenvolvimento de provas e demonstrações bem como para a sua validação. Os alunos tinham confiança no que o professor dizia, tendo-o ouvido com atenção. Todavia, eles confiaram muito nos processos por si seguidos, originando diálogos vivos, dentro dos grupos e entre o professor e os grupos, de defesa dos vários pontos de vista existentes. Nalguns casos, os alunos tiveram tal convicção sobre a validade das suas provas que passaram à frente, para a resolução de outra actividade, sem terem mostrado, ao professor, o que haviam feito, no sentido da sua validação.

Atitudes e Concepções Relativamente à Matemática e ao Processo de Aprendizagem

A atitude é encarada como uma intenção de comportamento, distinguindo-se do comportamento em si, exprimindo uma orientação face a um determinado objecto a que o sujeito atribui um significado determinado. Esta significação resulta da representação que cada pessoa tem do objecto em causa e é construída em interacções com experiências do dia a dia, em diferentes contextos sociais, em diferentes momentos e com diferentes fontes de informação.

Designaremos por concepção acerca de um determinado objecto a organização da informação a ele respeitante em construções mais ou menos complexas. Esta é constituída pela informação recebida a cada momento e pela informação já existente tanto a ele referente como a objectos a ele associados. Neste sentido poderemos dizer que a representação do objecto resulta da estruturação de diversas concepções.

Desta forma, a atitude de um aluno face à Matemática é função da representação que ele faz a seu respeito e, consequentemente, das concepções que transporta consigo. Investigações realizadas em diversos países mostram que os alunos do ensino secundário tendem a encarar a Matemática como consistindo essencialmente em fórmulas e cálculos e que a sua aprendizagem se faz ouvindo o professor e memorizando o que ele diz (Frank, 1988; Shoenfeld, 1991).

Com o pequeno questionário de quatro perguntas abertas a que os alunos teriam de responder no fim do ano lectivo, bem como com a observação feita nas aulas e com os diálogos estabelecidos com os alunos e professores envolvidos, pretendia-se recolher alguma informação sobre a questão das atitudes e concepções dos alunos, nomeadamente no fim da experiência.

Atitudes e Concepções em Relação ao LOGO.GEOMETRIA

Com a pergunta "Como descreverias o LOGO.GEOMETRIA para um colega de outra turma que não o conheça? Explica-lhe para que serve, no teu entender, o LOGO.GEOMETRIA", pretendia-se recolher informação sobre a atitude e as concepções dos alunos quanto ao programa. Que representava o LOGO.GEOMETRIA para eles? Que significado lhe davam os alunos? O que é que seria realçado após as dez semanas de trabalho com ele?

As respostas obtidas foram classificadas em duas categorias: O LOGO.GEOMETRIA é um material didáctico ou é um instrumento (ver Tabela 1). O LOGO.GEOMETRIA é visto como um material didáctico quando lhe é atribuído claramente uma função de ensino. O LOGO.GEOMETRIA é visto como um instrumento se encarado mais como uma ferramenta a usar segundo o critério do utilizador. Trinta e três, dos trinta e oito alunos que responderam a esta pergunta, afirmaram que o LOGO.GEOMETRIA era um programa computacional que servia para aprender Geometria/Matemática, ou seja, encararam-no como um material didáctico. As respostas dadas pelos alunos da turma de Informática foram identificadas por um I e as dos alunos da turma de Agricultura por um A. Foram obtidas por exemplo as seguintes respostas entre outras de semelhante teor:

> "O LOGO.GEOMETRIA serve para aprender Geometria e para motivar para a Geometria" (I);

> "O LOGO.GEOMETRIA serve para se aprender Geometria de um modo mais eficaz e onde o aluno se sente mais motivado e mais à vontade para aprender, permitindo ao aluno descobrir coisas novas que normalmente não conseguiria perceber"(I);

> "O LOGO.GEOMETRIA serve para facilitar a compreensão da Geometria e do Cálculo Vectorial. Com ele podemos compreender melhor e ver com a máxima precisão e sem trabalho praticamente nenhum os resultados pretendidos"(I);

> "E uma maneira interessante de aprender Matemática. O LOGO.GEOMETRIA é um incentivo positivo, especialmente para aqueles que nunca tiveram grande interesse ou motivação para a Matemática"(A);

> "O LOGO.GEOMETRIA serve para mostrar aos alunos que existe uma nova maneira de dar Matemática, uma Matemática do futuro, através do computador. O Logo.Geometria dinamiza bastante os jovens e torna a Matemática mais clara pela construção das figuras geométricas, ou seja, pela melhor visualização dos objectos"(A);

Os restantes cinco alunos, quatro da turma de Informática e um da turma de Agricultura (ver Tabela 1), disseram que o LOGO.GEOMETRIA era um instrumento, uma ferramenta substituta de outras como, por exemplo, o esquadro e o compasso. Para estes alunos,

> "O LOGO.GEOMETRIA é o nosso papel e caneta e além disso, é mais agradável e fácil. Com ele podemos desenhar (geometricamente) quase tudo"(I),

e

> "O LOGO.GEOMETRIA serve para resolver as questões mais rapidamente"(A).

Para muitos dos alunos, de ambas as turmas, o LOGO.GEOMETRIA é visto como algo que ultrapassa um simples e mero programa computacional. Ele tornou possível todo um conjunto de acontecimentos interessantes e motivadores.

Não se encontrou nenhuma resposta de conteúdo especificamente informático. Não houve, sequer, nenhuma crítica sobre as características informáticas do programa, nomeadamente sobre a sua boa ou má definição/resolução e a sua maior ou menor rapidez de execução, que talvez tivessem razão de ser, pois, o LOGO.GEOMETRIA corre em placa CGA e torna-se, por vezes, lento pela sua grande dependência da linguagem Logo. Mesmo os alunos da turma de Informática, mais experientes na utilização do computador que os seus colegas da turma de Agricultura, identificaram o LOGO.GEOMETRIA com a aprendizagem da Matemática, esquecendo por completo todas as críticas que inicialmente tinham chegado a esboçar.

Porquê? Porque nada é pior do que o ensino que existe? Porque tudo o que seja trabalhar com o computador é melhor, é bom? Porque isso não lhes era pedido de forma explícita?

Os aspectos informáticos, os de índole da crítica de um "software", foram assim claramente subvalorizados por outros considerados nais relevantes. A possibilidade de experimentação e visualização permitida pelo LOGO.GEOMETRIA origina, no dizer de um aluno,

"Desenvolvimentos que nunca tinham sido percebidos"(A).

O conhecimento das dificuldades sentidas pelos alunos na utilização do computador, nomeadamente com o LOGO.GEOMETRIA, é um elemento importante em termos de ilacções pedagógicas futuras. As respostas obtidas à segunda pergunta do pequeno questionário, "Consideras que o LOGO.GEOMETRIA é de fácil ou de difícil utilização? Porquê?", foram de três tipos: Fácil, Difícil e Fácil/Difícil (ver Tabela 2). O facto de apenas dois alunos da turma de Agricultura terem considerado o programa de difícil utilização levou à elaboração da Tabela 3, onde foram agrupados numa só coluna os valores das duas colunas da direita da Tabela 2.

Dos vinte e quatro alunos da turma de Informática que responderam a esta pergunta, vinte consideraram o LOGO.GEOMETRIA de fácil utilização e quatro consideraram-no fácil/difícil. Não houve nenhum aluno desta turma que tenha escrito que o LOGO.GEOMETRIA era de difícil utilização.

Nesta turma as dificuldades de utilização do programa foram atribuídas, essencialmente, ao facto de as aulas com o LOGO.GEOMETRIA

> "Se basearem muito nas aulas anteriores. Se as percebemos é fácil, caso contrário é difícil"(I),

ou ainda,

> "Por vezes é um bocado difícil quando o problema requer mais atenção e temos dificuldade em entender os comandos certos que devemos utilizar"(I).

A facilidade de utilização é justificada pelos comandos serem em português, pela existência do cartão de referência e, em vários casos, pela boa prestação dos professores.

Os alunos da turma de Agricultura deram respostas com um pendor bastante diferente. Dos catorze alunos desta turma, apenas quatro consideraram o LOGO.GEOMETRIA de fácil utilização. Sete alunos responderam que o programa era por vezes fácil/difícil e dois alunos afirmaram que o programa era de difícil utilização. Um aluno, que tinha uma grande deficiência visual, não respondeu a esta pergunta. Ele escreveu em toda a primeira página da folha do questionário ocupando o espaço reservado às duas primeiras perguntas mas sem ter respondido à segunda. Este facto apenas foi constatado a posteriori sem hipóteses de superação.

O LOGO.GEOMETRIA, para dois alunos desta turma, foi de difícil utilização pois,

> "Não tínhamos bases nenhumas no computador, nomeadamente no teclado"(A).

A facilidade de utilização deve-se, também, ao manual ser em português e ao apoio dos professores.

TABELA 1

Opinião dos Alunos sobre o que é o LOGO.GEOMETRIA

	O LOGO.GEOMETRIA como material didáctico	O LOGO.GEOMETRIA como instrumento
I	20	4
A	13	1

TABELA 2

Opinião dos Alunos sobre a Facilidade/Dificuldade de Utilização do LOGO.GEOMETRIA

	Fácil	Fácil/Difícil	Difícil
I	20	4	0
A	4	7	2

T A B E L A 3

Opinião dos Alunos sobre a Facilidade/Dificuldade de Utilização do LOGO.GEOMETRIA

	Fácil	Fácil/Difícil ou Difícil	
I	20	4	24
A	4	9	13
	24	13	37

Valor do QUI-QUADRADO Com A Correcção de YATES

$$\chi^2 = 8.0467$$

Nota: Este teste deve ser encarado com algumas reservas uma vez que na tabela das frequências esperadas existe um valor ligeiramente inferior a 5 unidades (Levin, 1987).

15.6	8.4
8.4	4.6

Houve, ainda, quem se tenha referido ao bom trabalho de grupo:

> "Com o treino o difícil torna-se fácil, especialmente quando o grupo todo trabalha, fazendo relatórios, fazendo perguntas ao professor e raciocinando, pois para se desenvolver trabalho é preciso usar o raciocínio"(A).

O que levou os sete alunos da turma de Agricultura a dar uma resposta de fácil/difícil foi o facto da utilização do LOGO.GEOMETRIA depender do estudo que se faz do que se dá nas aulas, da falta de bases de conhecimentos matemáticos e de um bom trabalho de grupo:

> "Facilidade relativa quando se estuda, caso contrário é difícil"(A);

> "Nalguns trabalhos é fácil, noutros é difícil devido à carência de bases dos outros anos"(A),

> "Depende, teve partes fáceis e outras difíceis, pois o LOGO.GEOMETRIA precisa do mínimo de conhecimentos matemáticos para uma boa utilização assim como um bom ambiente de grupo de trabalho para se poder conseguir atingir minimamente os objectivos pedidos"(A).

As duas turmas eram bastante distintas, não só quanto ao número de alunos, mas também quanto aos conhecimentos matemáticos e à experiência com o computador. As concepções dos alunos relativamente ao que é o LOGO.GEOMETRIA são muito similares, como se viu atrás, porém, a atitude quanto à facilidade ou não da sua utilização já é bastante diferente.

Tendo em conta a Tabela 3 e recorrendo ao teste do Qui-Quadrado com a correcção de Yates, podemos afirmar, com uma certeza de noventa e nove por cento, que a atitude, quanto à facilidade de utilização do LOGO.GEOMETRIA dos alunos destas duas turmas é diferente.

Atendendo às respostas que deram os alunos de ambas as turmas, pode-se afirmar que há uma identificação muito grande do LOGO.GEOMETRIA com a aula de Matemática e com o trabalho aí desenvolvido. O LOGO.GEOMETRIA é associado aos assuntos tratados nas outras aulas, ao trabalho de grupo, ao apoio dado pelos professores, às vantagens de visualização permitidas, a uma melhor aprendizagem, porque dos alunos e à confiança nos resultados obtidos. Mesmo os alunos da turma de Informática esqueceram os comentários usuais na crítica de "software": rapidez de execução e definição, por exemplo.

As dificuldades de utilização do LOGO.GEOMETRIA foram sentidas essencialmente pelos alunos da turma de Agricultura, tendo-as ligado mais aos seus poucos conhecimentos de Matemática e nalguns casos à constatação da falta de estudo, do que a problemas de ordem informática -- só dois alunos a associaram ao teclado e à pouca experiência de trabalho com o computador.

Atitudes e Concepções em Relação às Actividades Desenvolvidas

Numa experiência como esta, que se pretende inovadora e geradora de mudança, assume toda a importância o tipo de actividades propostas aos alunos, pois os mesmos materiais didácticos produzem efeitos diversos quando trabalhados de maneiras diferentes. Quais as atitudes e concepções dos alunos em relação às actividades que lhes foram propostas ao longo das dez semanas de trabalho com o LOGO.GEOMETRIA?

Apenas um aluno, de todos quantos participaram na experiência, e da turma de Informática afirmou não se ter interessado pelo trabalho, tendo respondido à pergunta "O que dizes das actividades matemáticas desenvolvidas nas aulas com computador?", da seguinte forma:

> "Não sei bem, porque não me interessei muito por elas".

Esta resposta de pouco apreço pelas actividades desenvolvidas deve-se, em grande parte, à má integração deste aluno no trabalho de grupo, como pode ser constatado pela sua resposta à primeira pergunta do questionário onde descreve o LOGO.GEOMETRIA da seguinte forma:

> "O LOGO.GEOMETRIA é um programa informático sobre o estudo da Geometria que serve para os alunos entenderem melhor e terem mais interesse no seu estudo, o que nem sempre acontece porque os computadores são poucos e são 3 ou 4 alunos por cada um".

Trata-se de um caso de má integração no trabalho de grupo que não foi detectado e resolvido durante as dez semanas de trabalho com o computador. Todos os outros alunos comentaram favoravelmente as actividades desenvolvidas. Eis algumas das respostas:

> "Houve durante todo o momento uma grande expectativa porque ninguém sabia como era mexer com o computador. Com o decorrer das aulas houve um desenrolar positivo entre computadores/alunos, que já sabiam dominar a máquina, e foi-se tornando mais fácil ir resolvendo as fichas e os problemas que iam aparecendo"(A);

> "Estas actividades matemáticas são muito interessantes e deram-me novas perspectivas da Matemática, tendo-me levado a um maior interesse pela disciplina"(A);

> "Bastante significativo o uso do computador pois pudemos verificar tudo o que demos na parte teórica que de outra maneira não conseguiríamos. Também, em certas ocasiões, foi a partir da prática com os computadores que tirámos certas conclusões que nunca tiraríamos só pela teoria"(I);

"As actividades foram muito úteis. Com as capacidades do LOGO.GEOMETRIA foram criadas novas experiências, completamente novas, de aprendizagem que foram muito interessantes. Estas actividades contribuíram para um certo desenvolvimento do aluno: novas situações eram apresentadas e tinhamos de tentar descobrir a sua solução; possibilitando, assim, que o aluno confiasse nas suas próprias capacidades.

Por outro lado é uma outra visão da Matemática que por vezes é mais entusiasmante levando a um maior interesse e aproveitamento"(I);

As respostas dadas pelos alunos foram classificadas em duas categorias: As actividades foram boas por causa do computador ou foram boas por outros motivos (como por exemplo, uma melhor aprendizagem da Matemática, mesmo que isso seja devido ao computador). Cada resposta foi classificada num destes grupos, e num só, e todas elas foram classificadas (ver Tabela 4). Dos treze alunos da turma de Agricultura (excluindo-se o aluno com grandes deficiências visuais que não respondeu à pergunta), dez realçaram a presença do computador como factor determinante para que as actividades fossem interessantes e, apenas, três subordinaram o computador a outros aspectos. Dos alunos da turma de Informática que consideraram as actividades interessantes e positivas e que foram em número de vinte e três (apenas um dos alunos disse não se ter interessado por elas), dezassete subordinaram o computador às actividades, encarando-o como um meio e não como um fim em si e, só, seis deles apontaram o computador como factor determinante da sua satisfação.

Aos dados constantes na Tabela 4 foi aplicado o teste do Qui-Quadrado com a correcção de Yates, donde se pôde inferir, com uma certeza de 99%, que as diferenças encontradas nas respostas dos alunos eram estatisticamente significativas: os alunos das

T A B E L A 4

Opinião dos Alunos sobre o Interesse das Actividades Matemáticas Desenvolvidas com o LOGO.GEOMETRIA

	As Actividades Matemáticas foram Interessantes		
	Por Causa do Computador	Por Outros Motivos	
I	6	17	23
A	10	3	13
	16	20	36

<u>Valor do Qui-Quadrado com a Correcção de Yates</u>

$$\chi^2 = 6.756$$

duas turmas têm concepções diferentes relativamente às actividades que desenvolveram nas aulas com o computador, embora tenham a mesma atitude favorável quanto a elas.

Atitudes e Concepções em Relação ao Computador

Os alunos da turma de Informática, mais experientes na utilização do computador, mais sabedores em conhecimentos de Matemática e com outras perspectivas académicas (muitos deles pretendem ingressar numa Universidade), entusiasmaram-se, particularmente com a utilização que foi dada ao computador, diferente da que estavam habituados, e sentiram-se desafiados com os problemas de Matemática que lhes foram sendo colocados aula após aula. Estes alunos realçaram bastante a sua aprendizagem de Matemática através da descoberta, por eles próprios, das soluções dos problemas, bem como com a ligação das aulas com o computador com as outras sem computador e com a boa prestação dos professores presentes associada à utilidade de trabalhar em grupo.

Os alunos da turma de Agricultura explicitaram o seu interesse principalmente pelas actividades desenvolvidas nestas aulas devido à presença do computador. Para estes alunos o facto de lhes ter sido proposto um trabalho com computadores foi, triplamente motivador pois:

. O computador está na moda e na vida do dia a dia, nomeadamente nos locais de trabalho. Note-se que estes alunos estão muito próximos de um emprego, estudando numa área técnico-profissional;

. estes alunos não têm disciplinas onde aprendam a trabalhar com esta nova tecnologia, como acontece com os seus colegas da turma de Informática, sentindo-se assim vencer uma lacuna da sua escolaridade;

. a Matemática é uma disciplina difícil e, provavelmente, esta experiência foi encarada, por muitos deles, como a "última" hipótese de nela puderem vir a ter sucesso.

Fica a dúvida sobre as atitudes e concepções que eles teriam ao fim de dez semanas de trabalho com o computador se tivessem utilizado outro "software" e tivessem realizado outras actividades mais próximas da aula tradicional, ou mesmo actividades deste tipo com o LOGO.GEOMETRIA.

Se bem que já explicitada nas respostas às três primeiras perguntas atrás referidas, as atitudes e concepções em relação ao computador podem ser completadas com o que os alunos responderam à quarta pergunta do questionário, "Achas que o computador deveria ser igualmente usado noutros capítulos do programa? Porquê?".

Um aluno da turma de Agricultura escreveu o seguinte:

> "Talvez sim, talvez não, porque a utilização do computador pode ser boa pois trata-se de um trabalho novo, mas aquele que é desenvolvido nas aulas normais de Matemática também é muito importante"(A).

Esta resposta, classificada na coluna "Talvez" (ver Tabela 5), revela a importância que este aluno dá às aulas sem computador mostrando, claramente, que elas não foram "destronadas" pela nova tecnologia. Os restantes alunos desta turma, excepto o aluno com dificuldades visuais que acabou por não responder a esta pergunta, responderam afirmativamente, dizendo que o computador deveria ser utilizado noutros capítulos (ver Tabela 5), devido à motivação que ele provoca para o estudo levando a uma melhor compreensão da Matemática. De entre as respostas obtidas com este teor transcreveremos as seguintes, porque suas representantes:

> "Sim. Sei que não sou boa aluna a Matemática mas também sei que melhorei imenso com a ajuda dos computadores. Eles incentivaram-me e motivaram-me para algo de que realmente não via interesse. Sei que se continuasse a existir um ensino, especialmente a Matemática, através do computador, como foi este ano, tenho a certeza que as médias levantariam e os "maus" alunos tornar-se-iam melhores. Não digo que passassem a ser uns "génios" mas decerto que a motivação para o estudo era maior. Eu própria verifiquei isso, não só comigo, mas também com os que trabalharam comigo."(A);

> "Sim, nos capítulos onde os alunos têm bastantes dificuldades permitindo-lhes melhorar o seu conteúdo em Matemática, além de assimilarem mais facilmente a matéria. Por outro lado permitiria uma nova visão da Matemática, o que seria bastante dinamizador"(A);

> "Acho que sim, porque estariam mais tempo ligados aos computadores"(A).

Para os alunos desta turma, o computador aparece como "uma máquina salvadora", uma máquina "milagreira" que os poderá levar ao sucesso a Matemática, nomeadamente nos capítulos onde têm mais dificuldades.

Os alunos da turma de Informática, embora dando um grande relevo ao computador, como um factor de motivação, condicionam a sua utilização aos conteúdos matemáticos a trabalhar e às características do próprio computador. Dois deles disseram que o computador não devia ser utilizado noutros capítulos da Matemática pois,

T A B E L A 5

Opinião dos Alunos sobre a Utilização do Computador Noutros Capítulos do Programa Curricular da Matemática

	Utilização do Computador Noutros Capítulos			
	SIM	TALVEZ	NAO	NAO RESPONDEU
I	21	1	2	0
A	12	1	0	1

> "a Geometria é a parte do programa mais adequada devido a ser necessário construir figuras geométricas com rigor, o que a serem feitas no quadro sairiam com defeito"(I);

e

> "os outros capítulos do programa são todos à base de teoremas e fórmulas e o que importa no computador é apenas a perfeição das imagens geométricas"(I).

Mesmo o aluno cuja resposta foi classificada na coluna "Talvez" (ver Tabela 5) justificou a sua posição de forma muito parecida com estas,

> "A Geometria dá mais interesse ser estudada pelo computador, as outras unidades talvez não dessem tanto interesse"(I).

Estes três alunos identificaram a utilidade educativa do computador à sua capacidade gráfica e ao rigor das suas construções geométricas. Estas concepções serão fruto da pouca experiência que os alunos têm com "software" educativo? Ou será da interpretação que fizeram da pergunta, identificando o computador com o LOGO.GEOMETRIA? De qualquer das formas, ficam claras as concepções destes alunos em subordinarem o computador à aprendizagem da Matemática.

Os restantes vinte e um alunos pronunciaram-se pela positiva, dizendo que o computador deveria ser utilizado noutros capítulos, como a Trigonometria, por exemplo. Alguns destes alunos, porém, não especificaram os conteúdos deixando, contudo, clara a sua atitude de abertura à utilização do computador sempre que tal fosse considerado útil, pois à partida o computador ajudará. Algumas das respostas que os alunos deram, entre outras do mesmo teor, foram as seguintes:

"Em matérias como as equações e polinómios talvez o computador não traga grandes melhoras. A Trigonometria podia ser dada através do computador, tornando-se muito mais fácil de perceber"(I);

"Sim, há sempre certas coisas que o professor não consegue ensinar e assim com o computador é mais exacto"(I);

"Sim, porque o computador leva-nos a compreender mais facilmente a Matemática. Acho que o computador deveria ser utilizado todos os dias e em todas as disciplinas"(I);

Assim, em conclusão, os alunos interessaram-se pelo trabalho desenvolvido ao longo de todas as dez semanas de duração da experiência. Não se tratou, apenas, de um interesse inicial. O computador, as actividades propostas, o trabalho de grupo e a prestação dos professores foram factores fundamentais para que isso acontecesse. O LOGO.GEOMETRIA foi mais do que um "software" computacional, foi, mesmo, uma nova maneira de dar Matemática, de levar os alunos a motivar-se. Os alunos da turma de Agricultura encontraram mais dificuldade na utilização do programa, essencialmente, devido ao facto de terem poucas bases matemáticas dos anos anteriores e as actividades com o LOGO.GEOMETRIA estarem relacionadas com a matéria dada nas aulas anteriores, que nem sempre era estudada. A facilidade de utilização do LOGO.GEOMETRIA foi aumentada porque os comandos eram em português, existia o cartão de referência e apoio dos professores. As actividades matemáticas desenvolvidas nas aulas com o LOGO.GEOMETRIA valeram, para os alunos da turma de Agricultura, muito pelo facto de serem trabalhadas no computador que, foi encarado, quase, como uma condição suficiente para o sucesso em Matemática. Os alunos da turma de Informática consideraram as actividades interessantes por poderem descobrir, por si, relações matemáticas, por terem sido um desafio que os obrigou a "puxar" pela cabeça onde o computador desempenhou um papel auxiliar de grande importância.

O Ambiente e a Organização do Trabalho

Para Papert (1980), há uma grande ligação entre o conhecimento e o contexto onde ele é desenvolvido. Neste sentido, a criação de ambientes de aprendizagem que permitam desenvolver formas específicas de conhecimento assume um enorme peso educativo. O papel a desempenhar pelo professor e a organização do trabalho dos alunos são factores fundamentais a ter em conta na prática pedagógica. Eles estiveram sempre presentes, durante toda a experiência, no espírito do investigador. Vejamos o que disseram os alunos quanto a estes aspectos. Nas respostas obtidas podemos ler frases como as seguintes:

> "...Mas o que foi positivo foi a prestação de todos os professores presentes que tornaram a utilização do LOGO.GEOMETRIA mais fácil..."(I);

> "Ao princípio o LOGO.GEOMETRIA é um pouco complicado, mas depois com o auxílio do cartão de referência e dos professores..."(I);

> "...Pudemos trocar ideias, opiniões e dúvidas com os colegas"(I);

> "...Mesmo para o professor, houve um maior entusiasmo, porque se notou um interesse a nível de interrogações e de perguntas do professor. Os alunos, como se viu, não faltaram e quando algum faltou foi para estudar para um ponto"(A);

> "O LOGO.GEOMETRIA precisa de um mínimo de conhecimentos de Matemática para uma boa utilização assim como um bom ambiente de grupo de trabalho"(A);

> "...Sendo tudo mais fácil quando o grupo todo trabalha (faz relatórios, faz perguntas ao professor, raciocina, pois para desenvolver trabalho é preciso utilizar o raciocínio)"(A).

A realização desta experiência trouxe consigo grandes alterações à prática diária vivida pelos alunos quanto às aulas de Matemática: uma outra sala, computadores, trabalho em grupo, actividades para serem resolvidas com o computador e a presença de mais dois professores em cada aula. Os alunos, para além da sua motivação devida à presença do computador, sentiram-se mais apoiados do que antes. Muitos dos alunos mencionaram explicitamente o comportamento do professor nestas aulas. Sentiram que o professor estava tão ou mais empenhado no trabalho do que eles. Foi salientada a sua maior motivação, manifestada por uma assistência rápida às suas solicitações e à feitura de perguntas sobre o trabalho.

Salvaguardando uma única excepção (anteriormente referida) os alunos indicaram, ainda, o trabalho de grupo como um factor positivo e útil.

Como disse um aluno, "nas aulas sem computador estou por minha conta e nestas aulas com o computador alguém me auxilia, o que acho bom"(I).

<u>Atitudes e Concepções Acerca do Processo de Aprendizagem</u>

Esta experiência foi preparada de modo a que os alunos tivessem um papel mais activo na aprendizagem, participando de forma mais directa na construção do seu próprio saber. Até que ponto isto foi conseguido? Terão, os alunos, sentido essa diferença?

A maioria dos alunos referiu nas respostas dadas que se tratou de uma experiência "onde se aprendeu Matemática de maneira diferente". Diferente por causa da presença do computador? Porque se trabalhou em grupo? Por causa do bom ambiente criado? Por outros motivos? Quais? Por todas estas razões?

A Acção e a Descoberta. O combate à passividade dos alunos é um desafio a qualquer professor que queira melhorar a qualidade do seu ensino. E necessário mobilizar o aluno, no seu todo, para que a aprendizagem se processe da melhor forma. Mas como? Bastará pôr o aluno em movimento? Se bem que necessária, esta condição não parece ser suficiente. Há que responsabilizar o aluno, há que o colocar perante desafios que mobilizem a sua curiosidade intelectual, há que o activar de facto.

Das respostas obtidas podemos ler:

> "...Em vez de estarmos na sala comum, com o professor a 'despejar' a matéria, podemos Aplicar e Ampliar os nossos conhecimentos, pois com o LOGO.GEOMETRIA podemos Ver o que é uma mediatriz de um segmento de recta, por exemplo, Comprovar que um certo ponto é o ponto médio de um segmento de recta e ao mesmo tempo aprendemos informática e abrimos novos horizontes"(I);

> "...As actividades com o LOGO.GEOMETRIA obrigaram o aluno a encontrar ele próprio a solução e a tentar saber como fez e porque fez assim"(I);

> "...Há certas insignificâncias que o professor a explicar não nos consegue ensinar, enquanto nós no computador somos quem fazemos, somos quem pensamos, portanto é muito melhor trabalhar com o computador em Matemática"(I);

> "Nós com o LOGO.GEOMETRIA pudemos descobrir coisas novas que não poderíamos encontrar só com a teoria"(A);

> "O LOGO.GEOMETRIA é um programa interessante, temos é que descobrir os métodos de o utilizarmos"(A);

> "...O computador dá-nos uma grande ajuda em relação aos problemas que vamos encontrando ao longo das fichas de trabalho..."(A);

Com os seus relatos, os alunos realçaram o seu papel activo nas aulas com o computador. A descoberta, por eles, da resolução dos problemas foi um motivo de regozijo e de classificação em "melhor aprendizagem da Matemática". Os alunos manifestaram-se a favor de um trabalho feito por eles, onde desempenhem um papel com possibilidades de optar e decidir, porque sinónimo de aprender.

Raciocínio, Persistência e Confiança. Para muitos alunos, o seu papel na aprendizagem da Matemática é "receber conhecimentos e demonstrar que os adquiriu" (Frank, 1988). E uma concepção de saber "enlatado" , onde é sobrevalorizada a memória relativamente ao raciocínio, para ser passivamente recebido.

Terá esta experiência reforçado ou diluído esta concepção?

Ainda segundo aquela autora, para muitos alunos "os problemas de Matemática são questões que se resolvem rapidamente e em poucos passos". Com esta concepção, é natural que desistam de resolver um problema sempre que a sua resolução se torne demasiado demorada. O que escreveram estes alunos relativamente a esta questão?

Por outro lado e porque os conceitos são, muitas vezes, apenas memorizados sente-se, por parte dos alunos, uma insegurança bastante grande naquilo que fazem. Terá esta experiência contribuído para alterar esta situação?

Vejamos alguns extractos do que os alunos escreveram:

> "As actividades foram interessantes. Um aluno para as resolver tinha que "pôr a cabeça a trabalhar" e ser "criativo""(I);

"...Estas actividades contribuem, de certa forma, para um determinado desenvolvimento do aluno, isto é, novas situações eram apresentadas e tinhamos, assim, de tentar descobrir a sua solução, possibilitando, deste modo, que o aluno confie nas suas próprias capacidades"(I);

"...As vezes os problemas podem ser mais dificeis mas acabamos sempre por lá chegar, nem que seja mais tarde"(I);

"...O trabalho em grupo foi óptimo e em conjunto conseguimos fazer alguma coisa"(A);

"...Ao decorrerem as aulas houve um desenrolar positivo entre os computadores/alunos (que já sabiam dominar a máquina) e tornou-se mais fácil ir resolvendo as fichas de trabalho e os problemas que iam aparecendo"(A);

"Os alunos orientam-se e "puxando pela cabeça" conseguem resultados muito bons"(I).

O raciocinio é referido, pelos alunos, como uma necessidade e como uma consequência do LOGO.GEOMETRIA, mas é apresentado como uma coisa que, embora podendo estar associado à resolução de problemas dificeis, é útil e importante.

Muitos dos alunos revelaram uma grande persistência na sua actividade matemática. Para eles, é preciso estar atento ao trabalho, é preciso concentração e é preciso reflectir nas coisas para se descobrir um método que satisfaça o problema, sob pena de haver "enganos". As dificuldades "só" existem até se descobrirem os processos de resolução dos problemas.

Muitos dos alunos mostraram-se confiantes em relação ao seu trabalho, denotando possuirem bastante confiança naquilo que fazem e naquilo que o computador faz sob o seu "mando".

Muitas vezes temos dificuldade em nos referenciarmos, sabemos que não estamos bem mas não vemos alternativas, não vemos saidas para as situações com as quais já não nos identificamos. O facto dos alunos compararem as aulas com o LOGO.GEOMETRIA com as outras aulas, tecendo, mesmo, algumas críticas, revela que foi dada, aos alunos, uma alternativa de trabalho. Pelos relatos feitos no fim desta experiência os alunos assumem-se por uma aprendizagem activa, assumida de forma responsável, onde raciocinem descobrindo e resolvendo problemas através de um trabalho persistente e confiando nas suas capacidades.

<u>Atitudes e Concepções Diferentes Relativamente à Matemática</u>

Ser professor pressupõe que há uma preocupação com outrém, com os alunos, quanto ao seu desenvolvimento cognitivo e humano. Ser professor de Matemática pressupõe que se gosta desta disciplina e que se lhe encontra utilidade.

Para muitos dos nossos alunos, porém, a Matemática é vista como qualquer coisa desagradável e sem graça.

A generalidade dos alunos que participaram nesta experiência revelou ter alterado, favoravelmente, as suas atitudes e concepções relativamente à Matemática. De entre as respostas dadas pelos alunos ao questionário explicitando esta mudança destacamos as seguintes:

> "O LOGO.GEOMETRIA como experiência não é só Novas Noções de Matemática que adquirimos, mas sim, toda uma Nova Noção de Matemática, pois a disciplina já não é encarada com uma única via e digo isto porque para resolvermos um problema com o LOGO.GEOMETRIA temos várias maneiras de o resolver..."(I);

> "As actividades deram-nos outra visão da Matemática, mais entusiasmante, levando a uma maior compreensão e interesse pela Matemática"(I);

> "O LOGO.GEOMETRIA serve para mostrar aos alunos que existe uma nova maneira de dar Matemática - uma Matemática do futuro, através do computador"(A);

> "O LOGO.GEOMETRIA para além de nos dar uma nova visão da Matemática, pela melhor visualização dos objectos, representa uma nova perspectiva da Matemática"(A);

> "O LOGO.GEOMETRIA dá ao aluno uma nova perspectiva sobre a Matemática, ao mesmo tempo complexa e engraçada..."(A);

> "Esta experiência foi interessante e deu-nos um grande incentivo para encarar a Matemática. Hoje, já não encaro a Matemática aquele problema em que se lá chega e encalha, não, antes pelo contrário. E bom saber que há outras maneiras de fazer Matemática"(A).

Muitos dos alunos adquiriram atitudes e concepções diferentes da própria Matemática: nova (porque com computador, o instrumento do futuro), mais clara (porque mais concretizada, mais visualizada), mais entusiasmante, menos rígida (com mais de um caminho para resolver um problema), 'complexa e engraçada e onde já não se encalha, antes pelo contrário'.

Conclusões

Os alunos mostraram-se bastante satisfeitos com a experiência, manifestando um grande entusiasmo que durou as dez semanas dos trabalhos. A expectativa favorável inicial não se desvaneceu. Como reforço a esta realidade gostaria de focar a forma como os alunos da turma de Agricultura se comportaram na última aula com o LOGO.GEOMETRIA, que coincidiu com o último dia de aulas do ano lectivo. Normalmente estas aulas são diferentes, não se trabalham os conteúdos programáticos e discutem-se as classificações finais. Porém, nesta aula passou-se qualquer coisa de espantoso, "os alunos quiseram trabalhar na ficha de trabalho até ao último minuto do ano. Inacreditável, nunca me tinha acontecido isto!", afirmou o professor. De facto, após a resposta ao pequeno questionário, os alunos foram trabalhar nas actividades que faltavam resolver da ficha de trabalho Nº 4. Foi, mesmo, comovedora a forma como eles se despediram dos professores presentes. Muitas manifestações de carinho e de saudade por já terem terminado os trabalhos. Estes momentos são inesquecíveis.

Os alunos sentiram que estiveram envolvidos não em brincadeira mas em trabalho sério e importante em termos de aprendizagem da Matemática.

Para os alunos, o computador tornou mais fácil o trabalho ao fazer com rigor e rapidez, tanto as figuras geométricas, como os cálculos necessários. Porém, não se mostraram preguiçosos, antes pelo contrário, manifestaram vontade e prazer em resolver as actividades afirmando, mesmo, que o difícil estava no encontrar os métodos de resolução dos problemas. Para eles, os alunos são para pensar, descobrir os caminhos de resolução de um problema e mandar fazer figuras e cálculos ao computador e este, por sua vez, serve para os fazer com rigor, depressa e com perfeição.

Os alunos sentiram-se actores na sua aprendizagem. Eles descobriram e gostaram, realçando com bastante ênfase a "boa prestação dos professores presentes" valorizando duma forma geral o "trabalho de grupo para discutir as questões": construtores do seu saber mas com discussão com os colegas e com o apoio do professor.

Para muitos destes alunos o trabalho tem de se fazer com atenção e concentração para evitar enganos, mas os problemas, mesmo os difíceis, estão ao seu alcance.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Este estudo teve como principal objectivo analisar as potencialidades educativas do programa educacional LOGO.GEOMETRIA, numa versão especialmente preparada para apoiar a aprendizagem da Geometria Vectorial e Analitica, utilizando-o numa perspectiva pedagógica que valoriza as actividades de exploração e descoberta, para promover nos alunos

a) a construção de conceitos e de relações matemáticas;

b) a capacidade de formulação e resolução de problemas;

c) a compreensão da necessidade e utilidade das demonstrações;

d) novas atitudes e concepções relativamente à Matemática e ao seu papel na aprendizagem desta disciplina.

Neste Capitulo apresentam-se as conclusões que foram tiradas após o tratamento de todos os dados recolhidos, tecem-se alguns comentários ao trabalho realizado e levantam-se algumas questões decorrentes destes em conjugação com o suporte teórico e pedagógico que norteou esta investigação.

A Construção de Conceitos e de Relações Matemáticas

1. O trabalho com o LOGO.GEOMETRIA permitiu que os alunos adquirissem e consolidassem conceitos matemáticos. Isto resultou da constante necessidade que os alunos tinham de "exigir" do computador construções e dados para resolver as situações que lhes eram propostas. A obtenção e análise dos efeitos encontrados, bem como a sua comparação com outros casos levaram os alunos a uma melhor compreensão e aquisição dos conceitos em jogo.

2. A aquisição de conceitos foi muito facilitada pela concretização do abstracto permitida pelo computador e pelo LOGO.GEOMETRIA. A possibilidade que os alunos tiveram de, num curto espaço de tempo, poder desenhar e pedir dados permitiu uma familiarização grande com os objectos matemáticos, tornando-os mais ao seu alcance.

3. A aquisição de conceitos foi, também, facilitada pelas questões que eram levantadas pelos efeitos que o computador mostrava e que não eram de explicação imediata para os alunos. Estas situações "inexplicáveis" obrigou-os a reflectir, a discutir com os colegas e com o próprio professor colocando os conceitos em causa num plano mais concreto e mais próximo dos alunos, logo, mais apropriáveis.

4. Verificaram-se alguns casos em que os alunos respondiam correctamente a uma questão que implicava o recurso a um determinado conceito mas já não o faziam noutra situação diferente, mesmo tendo à mão o próprio computador. Pode-se afirmar, contudo, que o computador e o LOGO.GEOMETRIA desempenharam bem um papel motivador, de concretude e de desafio, mas não foram substitutos

do aluno nem do professor.

5. A experimentação proporcionada pelo computador e pelo LOGO.GEOMETRIA permitiu que os alunos descobrissem leis e relações matemáticas. Com o LOGO.GEOMETRIA os alunos relacionaram, conjecturaram e testaram as suas conjecturas desenvolvendo o seu espírito indutivo. Os construtores ACASO do LOGO.GEOMETRIA foram bons auxiliares dos alunos para a formulação das suas conjecturas e para a realização de testagens.

6. O trabalho com o LOGO.GEOMETRIA permitiu, a alguns alunos, a construção intuitiva de conceitos ainda não aprendidos. Quer a imagem fornecida pelo LOGO.GEOMETRIA quer a possibilidade de experimentação tiveram um papel muito importante para que tal acontecesse.

A Capacidade de Formulação e de Resolução de Problemas

1. Os alunos resolveram, quase sempre, os vários problemas com recurso a estratégias diferentes. O LOGO.GEOMETRIA foi bastante responsável pelo aparecimento de estratégias distintas pois abriu o leque das alternativas e facilitou outras soluções.

2. As mudanças não se fazem por decreto. Não basta pôr um computador à frente de um aluno para que ele o utilize sempre e em qualquer situação. O comportamento dos alunos na resolução dos problemas teve muito a ver com o problema com que eles se debatiam a cada momento. Os alunos da turma de Informática, por exemplo, resolveram a ACT2.3 por via analítica, mas resolveram as actividades da ficha Nº 8 através do computador. Aliás, a ACT3.3

já foi resolvida com o LOGO.GEOMETRIA. Porquê? Quer num quer no outro caso os alunos tinham o computador à frente e estavam a trabalhar em grupo. O que é que era diferente? Tudo parece indicar que para estes alunos e face aos seus conhecimentos matemáticos a primeira actividade tornava-se mais fácil de resolver com o papel e o lápis, enquanto que a segunda já era precisamente ao contrário. Os alunos não hesitaram. Houve aqui uma utilização racional e económica dos meios disponíveis por parte deles. Por seu lado, os alunos da turma de Agricultura, com menos conhecimentos de Matemática que estes seus colegas, resolveram a ACT2.3 com o recurso ao computador. Para estes alunos a dificuldade acabava por ser maior, provavelmente, utilizando o papel e o lápis.

3. Os alunos mostraram-se persistentes na resolução dos problemas não desistindo com o insucesso de uma primeira tentativa. Defenderam com convicção e com argumentação as estratégias definidas por eles, mesmo quando estas eram postas em causa pelo professor ou pelos próprios resultados encontrados ora pelo computador, ora no caderno. O erro funcionou para os alunos mais como uma mola para a aprendizagem do que um motivo de desistência.

4. Houve uma certa preocupação dos alunos em aproveitar resultados anteriores e problemas já resolvidos antes para a resolução dos novos problemas.

5. A formulação de enunciados de simples aplicação de regras e de feitura de cálculos foi uma prática bastante acentuada nas actividades de formulação de problemas.

6. Muitos dos problemas formulados pelos alunos não foram

pensados para ser resolvidos com o LOGO.GEOMETRIA, pois em muitos casos foram formuladas fora das aulas. A actividade de formulação de problemas era a última a ser resolvida e, várias vezes, havia falta de tempo para a realizar.

7. O LOGO.GEOMETRIA permitiu que alguns alunos formulassem problemas originais e imaginativos, conciliando aspectos geométricos, vectoriais e numéricos.

Provas e Demonstrações

1. O LOGO.GEOMETRIA desempenhou um papel muito importante de suporte e de meio visual e de auxiliar de cálculo para a elaboração de provas e demonstrações. Porém, a força da evidência das imagens foi, no início dos trabalhos, um obstáculo à necessidade da feitura de uma prova para a validação de uma proposição. "Isso vê-se logo", afirmaram muitas vezes os alunos.

2. O LOGO.GEOMETRIA através dos seus construtores ACASO permitiu que alguns alunos sentissem o exemplo genérico como um exemplo especial, não como apenas um outro caso, mas sim como um representante de toda uma classe de objectos.

3. Os alunos da turma de Agricultura formularam generalizações e consideraram-nas automaticamente válidas com base nos poucos casos por eles experimentados. Muitos dos alunos da turma de Informática, a partir da sétima aula com o computador, começaram a fazer as suas experimentações para os casos aleatórios fornecidos pelo LOGO.GEOMETRIA. Para alguns alunos, porém, a testagem para um caso genérico teve a força de uma

demonstração.

4. O ambiente da aula criado pelo LOGO.GEOMETRIA, pelo professor e pelas actividades propostas permitiram que bastantes alunos acabassem por sentir a necessidade e utilidade das demonstrações. O envolvimento dos alunos nos processos de prova foi de tal ordem que chegou a acontecer os alunos chamaram a si a validação final das suas provas. O professor com o seu constante questionar, "Então e isso é válido para todos os casos?", "Porque é que isso é assim?", "Utiliza aquela lei matemática!", foi muito responsável pelo "agarrar" do desafio da prova por parte dos alunos. Levar os alunos a sentir que ganham poder para resolver mais problemas se ficarem com a força da demonstração de uma dada proposição, pois podem recorrer a ela e utilizá-la (ela é válida), na resolução de outros problemas, é um passo importante para a aprendizagem das demonstrações. Os alunos têm de sentir a utilidade das provas, caso contrário continuarão a olhar para elas como qualquer coisa inútil e aborrecida.

Novas Atitudes e Concepções em Relação à Matemática e ao seu Papel na Aprendizagem Desta Disciplina

1. No fim do ano lectivo as criticas dos alunos, de índole informática, ao LOGO.GEOMETRIA foram subvalorizadas por outras mais relevantes como a sua utilidade e vantagens. Este aspecto assume particular importância no caso dos alunos da turma de Informática.

2. A concepção dos alunos de ambas as turmas relativamente ao que é o LOGO.GEOMETRIA é muito semelhante. O programa é associado

a uma nova maneira de "dar a Matemática", ao ambiente de trabalho que ele proporciona, às vantagens da visualização permitida, a uma diferente forma de aprender Matemática e aos próprios conteúdos programáticos. A sua atitude quanto ao LOGO.GEOMETRIA é também semelhante, favorável. Porém, a atitude quanto à sua utilização, difere de turma para turma. Os alunos da turma de Agricultura consideram-no de difícil utilização enquanto os alunos da turma de Informática o consideram de fácil utilização. Os factores ligados à dificuldade de utilização estão relacionados com a "matéria": se se sabe, utiliza-se facilmente o LOGO.GEOMETRIA, se não se sabe, tem-se mais dificuldade.

3. Para os alunos de ambas as turmas são características positivas do LOGO.GEOMETRIA o facto dos comandos serem em português e a existência do Cartão de Referência. Os alunos de ambas as turmas consideram, ainda, a "boa prestação dos professores" um factor facilitador da utilização do LOGO.GEOMETRIA.

4. A atitude dos alunos de ambas as turmas quanto às actividades desenvolvidas com o LOGO.GEOMETRIA é favorável, resultando, porém, de concepções diferentes quanto a elas. Os alunos da turma de Agricultura associam as actividades à presença do computador enquanto a maioria dos alunos da turma de Informática as associam essencialmente à possibilidade de puderem descobrir por si relações matemáticas, por constituírem um desafio que os obrigou "a puxar pela cabeça" onde o computador desempenhou um papel auxiliar de grande importância.

5. Os alunos de ambas as turmas têm uma atitude favorável quanto ao computador. Para os alunos da turma de Agricultura o

computador assume-se como uma máquina "quase milagreira". Para os outros alunos o computador tem características próprias, cuja utilidade depende muito do "software" que se utiliza e como se utiliza.

6. Para a generalidade destes alunos o computador tornou o trabalho mais fácil, pelo rigor das figuras e dos cálculos e pela rapidez de execução. O computador é para "trabalhar e o aluno é para pensar".

7. Muitos dos alunos de ambas as turmas adquiriram concepções e atitudes diferentes da Matemática. Passaram a ter uma atitude mais favorável e de mais interesse porque já acham a Matemática mais "clara", mais "entusiasmante", menos "rígida", mais "engraçada" e que "não é intransponível".

8. Muitos dos alunos de ambas as turmas consideram que a descoberta, por eles, da resolução dos problemas foi um motivo de satisfação e de melhor aprendizagem da Matemática. Por outro lado, muitos dos alunos revelaram uma grande persistência na sua actividade matemática onde as dificuldades "só existem até se descobrir os processos de resolução dos problemas".

9. Muitos dos alunos mostraram-se confiantes em relação ao seu trabalho, em relação ao que faziam e ao que "mandavam" fazer ao computador.

Estas conclusões confirmam e reforçam o papel positivo e útil que os computadores podem desempenhar na educação matemática. Mason (1991) afirma que cada vez mais os factos e conhecimentos matemáticos estarão baseados numa intuição profundamente desenvolvida a partir do uso de programas computacionais, onde todo um vasto conjunto de conhecimento matemático sofisticado terá como suporte o rato - a mão - o olho - o "écran" do monitor, cuja generalidade não é expressa por letras mas experimentada pela musculatura. Ainda segundo este autor, cada vez mais o "software" permite que o utilizador manipule objectos no "écran" envolvendo ideias matemáticas como objectos geométricos (gráficos e curvas), ícons referentes a objectos matemáticos como grupos, transformações e fórmulas que até então só poderiam ser utilizadas através da Matemática formal -- desta forma a Matemática formal aproxima-se muito mais do utilizador.

A utilização destes programas na sala de aula de Matemática "deixará mais tempo livre para os alunos se preocuparem com o pensamento matemático" (Mason, 1991, p.19). O motivo principal para que esta realidade não aconteça é, para Dreyfus (1991), devido ao estatuto que o raciocínio visual tem na educação matemática. Para este autor a tradição manda que se encare este raciocínio apenas como um suporte para descobertas de novos resultados e de pistas para provar, estando num pé de inferioridade em relação ao raciocínio algébrico. Esta maneira de pensar esconde o papel importante desempenhado pelo raciocínio visual muito particularmente no trabalho diário dos matemáticos. Além disso e segundo Dreyfus (1991) estudos cognitivos recentes apontam para o potencial tremendo que as aproximações visuais têm para uma aprendizagem matemática. Torna-se, desta forma, um imperativo criar ambientes escolares com computadores para que este potencial do raciocínio visual tenha lugar.

O LOGO.GEOMETRIA, embora não permita a manipulação de objectos através do rato, permite o suporte teclado - mão - olho -

"écran". Com o LOGO.GEOMETRIA os objectos matemáticos, nomeadamente os geométricos e vectoriais, embora abstractos, ficam mais próximos do aluno permitindo-lhe fazer experiências com eles, compará-los e relacioná-los com outros.

Com a experiência realizada pretendeu-se de certa forma capitalizar este potencial, porém, como foi possível conseguir manter envolvidos e empenhados no trabalho dos conteúdos curriculares os alunos destas duas turmas? Se é inegável a aproximação do aluno ao abstracto através da sua concretização pelo computador, parece ser insuficiente este motivo. Também parece ser insuficiente a simples presença do computador, embora esta tenha marcado todo o trabalho desenvolvido: os alunos da turma de Agricultura associaram as actividades desenvolvidas ao computador e os outros alunos referenciaram-no como tendo sido um auxiliar importantíssimo. Da observação de todo o trabalho realizado tudo parece indicar que a grande causa para tal motivação foi o facto dos alunos se terem sentido desafiados aula após aula, semana após semana com os problemas que tinham para resolver.

Os alunos sentiram-se responsabilizados pelo trabalho que estavam a fazer. Pelos relatos finais que os alunos fizeram podemos inferir que eles, no princípio dos trabalhos, acreditavam que o professor já sabia tudo, já sabia como é que os problemas se resolviam, que já sabia se era verdade ou não o que os alunos tinham feito. Porém, logo a partir das primeiras aulas com o LOGO.GEOMETRIA, o professor por várias vezes disse que não sabia porque é que um certo acontecimento se tinha verificado: muitas vezes o computador dava mensagens que o professor não entendia; outras vezes os alunos tinham introduzido mal o comando certo e entrava-se num certo impasse; outras vezes o professor dizia "que coisa engraçada, não me tinha ocorrido tal", como por exemplo o apagar o triângulo na ACT2.B, ou o encontrar o ponto médio do segmento de recta dado à custa da bissectriz de um ângulo que os alunos consideraram, ACT2.4. Este comportamento do professor não era a fingir, como muitas vezes acontece nas aulas, e os alunos sabiam-no, sentiam-no. Assim, os alunos foram ganhando uma maior confiança, uma maior certeza de que poderiam fazer coisas que o próprio professor desconhecia e que poderiam estar certas. Os alunos foram sabendo que podiam experimentar, que podiam inclusivamente chegar a resultados "disparatados" mas que o professor os iria analisar e discutir com eles. A Matemática começou a ser vista como podendo ter vários caminhos para chegar à solução de um problema e onde as demonstrações tinham o seu interesse, a sua utilidade e podiam ser feitas e compreendidas pelos alunos. Claro que em última análise era o professor quem validava, quem dizia que estava certo ou não, mas os alunos foram ganhando uma crença de que também eles podiam construir a verdade das coisas.

Por outro lado, neste ambiente de trabalho, os alunos começaram a procurar, mesmo, soluções originais para os problemas e provas. O desafio era resolver bem, depressa e de maneira diferente de modo que nem o professor tivesse pensado naquela hipótese. Os alunos sabiam que as suas resoluções eram toleradas, aceites e até desejadas.

Esta dinâmica propagou-se a toda a turma e os alunos competiam entre si, de forma sã, para ver quem resolvia primeiro e melhor.

Os professores não fugiram a este processo, chegando a estar, mesmo, envolvidos em discussão construtiva com os alunos na procura de resoluções de situações desconhecidas, também, para eles.

Os alunos sentiram-se mais apoiados do que nas aulas sem computador, tendo, este facto, sido realçado por alguns deles. Este factor foi, de certa forma, decisivo para o sucesso da experiência.

Foi neste contexto que os alunos agarraram as propostas de trabalho e chamaram a si os problemas que havia para resolver tendo-os feito seus. Para a sua resolução basearam-se em resultados já seus conhecidos e em problemas semelhantes resolvidos anteriormente, incorporando de forma implicita as heuristicas e técnicas existentes.

O factor tempo foi um obstáculo à possibilidade de um trabalho mais profundo na formulação de problemas e na exploração dos relatórios feitos pelos alunos. O cumprimento do programa curricular impôs-se. A organização escolar por disciplinas e por aulas seguidas de cinquenta minutos impôs-se também. Para quem participou neste trabalho não é dificil imaginar que uma sessão pudesse ter a duração de uma manhã.

A necessidade de colocar o raciocinio visual no seu devido lugar na educação matemática levanta, contudo, a questão de saber qual é o equilibrio correcto entre a utilização de instrumentos gráficos em computadores e calculadoras gráficas e o ensino da Matemática formal que inclui a produção dos mesmos gráficos à mão.

Esta pergunta tem todo o cabimento e importância, foi equacionada, muito particularmente, quando se analisou a forma diferente como os diferentes grupos de alunos trabalharam e utilizaram o computador. Por exemplo o GI1 utilizou muito o computador como um meio para poder concluir alguma coisa -- usando um raciocínio de aproximação por tentativas, de natureza mais algorítmica (caso da ACT2.8 em que os alunos construiram a circunferência pedida através de tentativas sucessivas, e caso da ACT3.7, por exemplo, onde os alunos construiram as rectas paralelas e só depois é que foram analisar as suas equações). O GI3, por exemplo, na ACT3.7, considerou primeiro as equações das rectas paralelas e só depois é que as foi construir no computador -- usando um raciocínio mais analítico.

Aparentemente estes alunos vêem de forma diferente a Matemática e consequentemente a utilização do próprio computador. Mas não é no confronto das diferentes perspectivas que os alunos crescem?

Um grande desafio se coloca à educação matemática nos dias de hoje. Vai esta disciplina ser "esvaziada" pela entrada inevitável do computador no ensino? Se a Matemática é mais do que "contas e algoritmos" será necessário mostrá-lo aos alunos, por eles e por ela.

Bibliografia

Agudo, F. R. D. (1989). Análise Real. Lisboa: Escolar Editora.

APM (1988). Renovação do Currículo de Matemática. Lisboa: APM.

Balacheff, N. (1988). Une Etude des Processus de Preuve en Mathématique chez des Elèves de Collège. Tese de doutoramento, Université Joseph Fourier -- Grenoble 1, França.

Bell, A. (1976). The Learning of General Mathematical Strategies. Tese de doutoramento, Shell Centre for Mathematical University of Nothingham.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1982). Qualitative Research for Education. Boston: Allyn & Bacon.

Carreira, S. & Tomé, G. (1989). Quod Novis. Lisboa: Projecto Minerva -- Departamento de Educação da Faculdade de Ciências.

Castelnuovo, E. (1970). Didáctica da Mastemática Moderna. México: Editorial Trillas.

César, J. (1991). The Logo Turtle in 3D-Geometry. In J. Ponte, F. Nunes, & E. Veloso (Eds.), Using Computers in Mathematics Teaching. Lisboa: Projecto Minerva -- Departamento de Educação da Faculdade de Ciências.

Cockcroft, W. (1982). Mathematics Counts. London: Her Magesty's Stationery Office.

Davis, P. & Hersh, R. (1980). The Mathematical Experience. Boston: Birkauser.

Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. Procceedings of the XV International Conference for PME, 1, p. 33-48.

Erlwangler, S. (1973). Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics. The Journal of Children Mathematical Behavior, 1(2), p. 7-26.

Fernandes, D. (1989). Aspectos Metacognitivos na Resolução de Problemas de Matemática. Educação e Matemática. Nº 8, p. 3-6.

Fetísov, A. (1980). Acerca da Demonstração em Geometria . Moscovo: Editorial MIR.

Fey, J. (1988). Technology and Mathematics Education: A Survey of Recent Developments and Important Problems. Conference presented at ICME VI, Budapeste, Hungria.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. For the Learning of Mathematics, 3 (2), p. 9-18.

Frank, M. (1988). Problem Solving and Mathematical Beliefs. Arithmetic Teacher, 7 (3), p. 32-34.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: Reidel.

Grieffeath, D. (1988). Cyclic Random Competitio: a Case History in Experimental Mathematics. Notices of the Mathematical Society, Vol. 35, No 10.

Hoffman, D. & Meeks, W. (1987). The Computer-Aided Discovery of New Embedded Minimal Surfaces. The Mathematical Intelligencer, Vol. 9, No 3, p. 8-21.

Holland, D., & Treeby, T. (1977). Vectors: Pure and Applied. London: Edwards Arnald.

Laborde, C. & Laborde, J. (1991). Problem Solving in Geometry: From Microworlds to Intelligent Computer Environments. Conferência sobre a Resolução de Problemas, Viana de Castelo.

Lakatos, I. (1978). A Lógica do Descobrimento Matemático. Provas e Refutações (tradução do original em inglês de N. Caixeiro). Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Lesh, R. (1985). Aplications: Why Which, and How. In S. Sharron (Ed.), Applications in School Mathematics. Reston: NCTM:

Lester, F. (1980). Problem Soving: Is it a Problem? In M. M. Linquist (Ed.), Selected Issues in Mathematics Education. Reston: NCTM.

Levin, J. (1987). Estatística Aplicada às Ciências Humanas (tradução do original em inglês de Sérgio Francisco Costa). São Paulo: Harper & Row do Brasil.

Ludke. M., & André, M. (1986). Pesquisa em E?ducação: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU.

MacDonald, T. (1973). The Role of Heuristic Proof in Mathematics Teaching. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 4, p. 103-107.

McLeod, D. (1989). The Role of Affect in Mathematical Problem Solving. In D. Leod & Adams (Eds.), Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective. New York: Springer - Verlag.

Mason, J. (1991). Mathematical Problem Solving: Open, Closed and Exploraty in the UK. ZDM, 91/1, p. 14-19.

Matos, J., Almeida, M., & Teixeira, M. (1982). Algumas Reflexões sobre o Ensino da Geometria. In O Ensino da Matemática nos Anos 80, p. 139-148, Lisboa: SPM.

Matos, J. (1990). As Concepções e Atitudes dos Alunos em Relação à Matemática. Profmat 90, p. 177-186.

Monteiro, A. (1982). Algebra Linear e Geometria Analitica. Lisboa: AEFCL.

Moreira, L. (1989). A Folha de Cálculo na Educação Matemática. Lisboa: Projecto Minerva -- Departamento de Educação da Faculdade de Ciências.

Nasbitt, J. (1987). Macrotendências (tradução do original em inglês de Maria do Rosário de Sousa Guedes). Lisboa: Presença.

NCTM (1980). An Agenda for Action: Recomendations for School Mathematics of the 1980s. Reston: NCTM.

Neves, M. (1988). O Computador na Recuperação em Geometria de Alunos do 9o Ano. Lisboa: Projecto Minerva -- Departamento de Educação da Faculdade de Ciências.

Noss, R. (1987). Children's Learning of Geometrical Concepts Through Logo. Journal for Research in Mathematics Education, 18, p. 343-362.

O'Daffer, G. (1980). Geometry: what Shape for a Comprehensive Balanced Curriculum? In M. M. Lindquist (Ed.), Selected Issues in Mathematics Education. Reson: NCTM.

Papert, S. (1980). Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas. New York: Basic Books.

Pehkonen, E. (1991). Problem Solving in Mathematics. ZDM 91/1, p. 1-4.

Pólya, G. (1945). How to Solve it?. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. (1984). Functional Reasoning and the Interpretation of Cartesian Graphs. Tese de doutoramento, Universidade da Georgia.

Ponte, J. (1986). O Computador: Um Instrumento da Educação. Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J. (1988). Novas Tecnologias da Informação: uma Segunda Oportunidade?. Manuscrito não publicado, Universidade de Lisboa.

Ponte, J. (1991). Problemas de Matemática e Situações da Vida Real. Manuscrito não publicado, Universidade de Lisboa.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston: NCTM.

Robinson, G. (1989). Collier's Encyclopedie. Volume 2, p. 120 e Volume 10, p. 698. New York: Macmillan.

Rosemberg, A. (1989). Collier's Encyclopedie. Volume 1, p. 543. New York: Macmillan.

Sankar, N. (1988). Observations on the Use of Computers in Proof Checking. Notices of the American Mathematical Society, 35, Nº 6, p. 804-805.

Schoenfeld, A. (1991). What's all the Fuss about Problem Solving? ZDM, 91/1, p. 4-8.

Silva, J. (1953). Consultório. Gazeta da Matemática, Nº 54, p. 18-23.

Silva, J. (1965). Geometria Analítica Plana. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.

SPM (1988). Boletim. Nº 11, p. 62-63.

Stacey, K. (1991). Linking Application and Acquisition of Mathematical Ideas through Problem Solving. ZDM, 91 /1, p. 8-14.

Sowder, L. (1980). Concept and Principle Learning. In R. Schumway (Ed.), Research in Mathematics Education, p. 244-280.

Taylor, R. (Ed.) (1980). The Computer in the School: Tutor, Tool, Tutee. New York: Teachers College Press.

Trigueiros, A. (1989). Tenta LOGO, que Descobres. Lisboa: Projecto Minerva -- Departamento de Educação da Faculdade de Ciências.

Veloso, E. (1987). O Computador na Aula de Matemática. Lisboa: Projecto Minerva -- Departamento de Educação da Faculdade de Ciências.

Watson, F. (1980). The Role of Proof and Conjecture in Mathematics Teaching. Internatiomal Journal of Mathematics Education and Science Tefchnologye, 11, Nº 2.

ANEXO 1

Actividades escolhidas

Nota: em relação a cada actividade, indicam-se alguns procedimentos do LOGO.GEOMETRIA que eventualmente poderão ser necessários.

1. Tenta verificar se a mediatriz de um segmento de recta que o programa constrói é realmente o lugar geométrico dos pontos distando igualmente dos extremos do segmento. (FAZ.P, FAZ.S, MED, MARCAR, P.RECTA, DIST)

2. Partindo de duas rectas r e s, tenta verificar que os pontos da bissectriz do menor ângulo formado por duas rectas, construída pelo procedimento BISSECTRIZ, distam igualmente das duas rectas. Depois traça as perpendiculares a r e s passando por um mesmo ponto e compara a medida do menor ângulo entre as duas perpendiculares com a medida do menor ângulo entre r e s. (FAZ.R, BISS, P.RECTA, P.ACASO, DIST, PERP, ANG)

3. Como poderemos verificar se três pontos são colineares, utilizando os procedimentos do LOGO.GEOMETRIA, mas sem utilizar vectores? E com procedimentos com vectores, como o poderíamos fazer? (FAZ.R, COINCID?, INTERSEC, FAZ.V, CONTEUDO)

4. Constrói um triângulo, e depois as mediatrizes dos seus lados. Verifica que são concorrentes. Constrói a circunferência circunscrita ao triângulo. E se o triângulo fôr rectângulo? (FAZ.P, FAZ.TRI, FAZ.S, MED, INTERSEC, DIST, FAZ.C, PERP)

5. Serão duas circunferências quaisquer sempre homotéticas? Como determinar os centros e as razões da homotetia? (FAZ.P, FAZ.C, R.PONTO, PARAL, FAZ.R, INTERSEC, RAIO, HOMOT, COINCID?)

6. Constrói os triângulos [ABC] e [PQR], em que os vértices têm as seguintes coordenadas: A(-100,30), B(-70,30), C(-70,80), P(125,-20), Q(80,-20) e R(80,-95). Serão os triângulos [ABC] e [PQR] semelhantes? Indica uma ou mais sequências de transformações geométricas que levem o transformado de [ABC] a coincidir com [PQR]. Será possível obter o mesmo resultado com uma única transformação? (FAZ.P, FAZ.TRI, INTERSEC, ROT, TRANS, SIM, HOMOT, COINCID?)

7. Constrói um triângulo [ABC] e submete-o a duas simetrias axiais (escolhe os eixos de simetria de modo que o triângulo final fique dentro dos limites do "écran"). Será possível obter o mesmo resultado com uma única transformação? Será sempre assim? Vê separadamente os casos em que os eixos de simetria são oblíquos e paralelos. (FAZ.P, FAZ.TRI, FAZ.R, SIM, ROT, TRANS, COINCID?)

LOGO.GEOMETRIA

Sintaxe de alguns procedimentos mais usuais

Construtores

```
FAZ.P "A [30 40]        FAZ.R "r [A B]          FAZ.C "c [A 50]
FAZ.S "S [A B]          FAZ.TRI "TR [A B C]     FAZ.V "v [60 7]
```

Outros construtores

```
P.ACASO "A              P.RECTA "P "r           R.PONTO "d "A
```

Construções geométricas

```
P.MED "A "s             PERP "p "r "A           PARAL "q "r "A
BISS "b "r "s           MED "m "s
```

Operações

```
DIST "A "B   ou   DIST "A "r                    INTERSEC "r "s
ANG "r "s               LADOS "ABC              ANG.INT "tr
```

Transformações geométricas

```
SIM "tr "ABC "r         ROT "f "e "C -60        TRANS "t "r "v
HOMOT "tr2 "tr "A 2
```

Actividades Escolhidas

Nota: em relação a cada actividade, indicam-se alguns procedimentos do LOGO.GEOMETRIA que eventualmente poderão ser necessários.

---

1. Serão duas circunferências quaisquer sempre homotéticas? Como determinar os centros e as razões da homotetia? (FAZ.P, FAZ.C, R.PONTO, PARAL, FAZ.R, INTERSEC, RAIO, HOMOT, COINCID?)

2. Constrói os triângulos [ABC] e [PQR], em que os vértices têm as seguintes coordenadas: A(0,0), B(-30,0), C(0,50), P(125,60), Q(80,60) e R(80,-15). Serão os triângulos [ABC] e [PQR] semelhantes? Indica uma ou mais sequências de transformações geométricas que levem o transformado de [ABC] a coincidir com [PQR]. Será possivel obter o mesmo resultado com uma única transformação? (FAZ.P, FAZ.TRI, INTERSEC, ROT, TRANS, SIM, HOMOT, COINCID?)

3. Constrói um triângulo [ABC] e submete-o a duas simetrias axiais (escolhe os eixos de simetria de modo que o triêngulo final fique dentro dos limites do "écran"). Será possível obter o mesmo resultado com uma única transformação? Vê separadamente os caos em que os eixos de simetria são obliquos e paralelos. (FAZ.P, FAZ.TRI, FAZ.R, SIM, ROT, TRANS, COINCID?)

Mais Algumas Actividades

1. Constrói os vectores $\vec{u}(60,40)$ e $\vec{v}(-40,60)$. Verifica que $\vec{u}.\vec{v}$ é igual a zero. Constrói um vector $\vec{w}(w1,w2)$ perpendicular ao vector $\vec{u}$ e de norma 20.

2. Constrói o triângulo cujos vértices são os pontos A(20,40), B(60,80) e C(120,20). Mostra, por tres processos diferentes, que o triângulo é rectângulo.

3. a) Constrói a recta r de equação geral 3x-y+2=0. Constrói a recta s de equação geral 6x-2y+100=0. Compara os seus declives. Verifica que as duas rectas são paralelas.

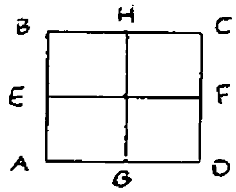
b) Constrói a recta t que passa pelo ponto A(50,20) e que é perpendicular à recta r. Relaciona os declives destas duas rectas perpendiculares.

4. Constrói a recta r que passa pela origem e cujo declive é 0.5. Qual é a equação que representa a família das rectas não verticais que passam pela origem? Qual é a equação que representa a família das rectas de declive 0.5?

ANEXO 2

Começa por apagar o referencial (APAGAR.REF). Em seguida, chama os módulos GEOMVECT, GEOMTRI e GEOMPOLI. Depois, se entenderes que precisas de mais módulos, podes chamá-los pelo seu nome. Serve-te sempre do CARTAO DE REFERÊNCIA.

1. Constrói os pontos A(0,0), B(0,60), C(60,60), D(60,0), E(0,30), F(60,30), G(30,0) e H(30,60).
Constrói, em seguida, a figura indicada.



Verifica que

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}$

Faz um pequeno relatório no espaço em branco abaixo reservado, explicando e desenhando o caminho que foi seguido pelo teu grupo para verificar as duas igualdades atrás indicadas.

2. Como construirias o vector aplicado $\overrightarrow{AC}$, em função dos vectores aplicados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AG}$? Obtiveste mesmo o vector aplicado $\overrightarrow{AC}$? Verifica.

No espaço abaixo reservado, desenha e comenta o trabalho desenvolvido pelo grupo.

Começa por apagar o referencial (APAGAR.REF). Em seguida, chama os módulos GEOMVECT, GEOMTRI e GEOMPOLI. Depois, se entenderes que precisas de mais módulos, podes chamá-los pelo seu nome. Serve-te sempre do CARTAO DE REFERÊNCIA.

1. Escreve FAZ.V "u [45 50]. Depois desenha um representante do vector livre $\vec{u}$ com origem no ponto A(40,20). Desenha, ainda, um representante do mesmo vector livre $\vec{u}$ com origem no ponto B(-100,-20).

Quantos representantes do vector $\vec{u}$ poderias ainda considerar?

---

2. Destrói todos os objectos que construiste (escreve INICIO).

Depois de apagares o referencial, constrói os pontos A(-90,30) e B(-60,60). Em seguida, constrói o vector livre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Admirado com o que estás a observar?

Experimenta, agora, com o vector livre $\vec{v} = \overrightarrow{EF}$, em que E(100,90) e F(80,50).

O que se estará a passar?

Que explicação dás para tudo isto?

Começa por apagar o referencial (APAGAR.REF). Em seguida, chama o módulo GEOMVECT.

1. Constrói os pontos M(0,0), A(20,0) e B(20,20). Constrói, em seguida, os vectores $\vec{e} = \overrightarrow{MA}$ e $\vec{f} = \overrightarrow{MB}$. Como os vectores $\vec{e}$ e $\vec{f}$ não são colineares, eles constituem uma base dos vectores do plano. Constrói, agora, o vector $\vec{u} = 3\vec{e} + 2\vec{f}$, na base $(\vec{e},\vec{f})$.

Seria possível decompor $\vec{u}$, na base $(\vec{e},\vec{f})$, através de outra combinação linear? Desenha e explica o que fizeste.

---

2. Como poderias encontrar as coordenadas de $\vec{u}$ na base $(\vec{g},\vec{h})$, onde $\vec{g} = -\vec{e}$ e $\vec{h} = -\vec{f}$? E na base $(\vec{i},\vec{j})$, onde $\vec{i} = -\ 0.5\ \vec{e}$ e $\vec{j} = \vec{f}$? Desenha e explica o que fizeste.

---

3. Destrói os objectos que construíste excepto os pontos M e A e os vectores $\vec{e}$ e $\vec{u}$. Agora, constrói o ponto C (0,20) e o vector $\vec{a} = \overrightarrow{MC}$. Encontra as coordenadas do vector $\vec{u}$ na base $(\vec{e},\vec{a})$. Desenha e explica tudo o que fizeste.

---

4. Depois de escreveres INICIO, constrói os pontos M(0,.0), A(20,0) e B(0,20). Constrói, ainda, os vectores $\vec{e} = \overrightarrow{MA}$ e $\vec{f} = \overrightarrow{MB}$ (que têm coordenadas (1,0) e (0,1), respectivamente, na base $(\vec{e},\vec{f})$ por eles formada). Verifica, com a ajuda do LOGO.GEOMETRIA, que na base $(\vec{e},\vec{f})$, $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v} = -\vec{e} + 4\vec{f}$, para $\vec{u} = -3\vec{e} + 2\vec{f}$ e $\vec{v} = 2\vec{e} + 2\vec{f}$. Existirá alguma relação entre as coordenadas do vector soma e as dos vectores parcelas? E se forem $\vec{a}$ e $\vec{b}$, dois vectores quaisquer, na mesma base, essa relação manter-se-á? Registas as tuas conclusões.

Ficha 4

1. Verifica, vectorialmente, que as diagonais de um paralelogramo se bissectam.
Desenha e explica o que fizeste.

NOTA: A partir deste momento vamos trabalhar no referencial o.n. do LOGO.GEOMETRIA.

2. Constrói o segmento de recta s de extremos A(100,30) e B(-20,70). Ao pedires ao LOGO.GEOMETRIA as coordenadas do ponto médio , M, do segmento de recta s (PR COORD.P.MED "s), obterás o seguinte par ordenado (40, 50). Verifica. Considera outros segmentos de recta à tua escolha e tenta encontrar uma relação entre as coordenadas do ponto médio de um segmento de recta e as coordenadas dos seus extremos. Testa a tua conjectura. Desenha e explica o que fizeste (não te esqueças de escrever a conclusão a que chegaste).

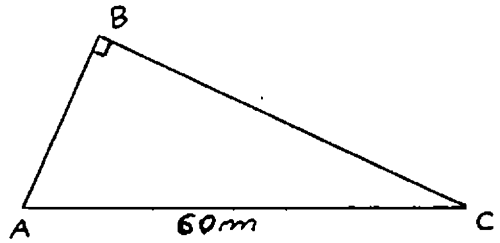
3. Destrói todos os objectos que construíste. Constrói os pontos M(-60,25) e A(-10,40). Sabendo que M é o ponto médio do segmento de recta [AB], constrói o ponto B.
Desenha e explica o que fizeste (não te esqueças de indicar as coordenadas do ponto B).

4. Formula um problema para cuja resolução sejam precisos alguns dos teus conhecimentos sobre vectores adquiridos até hoje.
Apresenta uma solução do problema formulado.

Começo por te lembrar que estamos a trabalhar no referencial ortonormado do LOGO.GEOMETRIA. Chama o ficheiro GVA (LOAD "GVA).

1. Constrói o vector $\vec{u}(100,30)$ e o ponto A(-50,20). Constrói alguns pontos (cinco) que pertençam à recta r que passa pelo ponto A e tem a direcção do vector $\vec{u}$. Verifica que os pontos pertencem mesmo à recta r.

2. Ajuda o Conselho Directivo da tua escola



O Conselho Directivo pretende que a escola compre um terreno de forma triângular (ver figura) para nele se construírem novas instalações (uma sala de Matemática melhor, um Centro de Informática mais espaçoso,...). Sabe-se que $\vec{AB}.\vec{AC} = 900$ e que 1 m^2 de terreno custa 2000$00 (dois mil escudos). Qual é o dinheiro necessário para se comprar o lote de terreno ?

3. Inventa um problema semelhante a este. Apresenta uma resolução do mesmo.

Começo por te lembrar que estamos a trabalhar no referencial ortonormado do LOGO.GEOMETRIA. Chama o ficheiro GVA (LOAD "GVA) e o Módulo GEOMVECT.

1. Constrói a recta r de equação geral $2x - 5y + 200 = 0$.
Relaciona o declive da recta r com as coordenadas de um seu vector director. Considera outros casos à tua escolha.
Testa a tua conjectura.

---

2. Destrói todos os objectos que construíste.
Constrói três rectas r, s e t, paralelas entre si.
Que relação existe entre os seus declives?
Qual é a sua justificação?

---

3. Como se relacionam os declives entre duas rectas perpendiculares (multiplica um pelo outro)?
Testa a tua conjectura.
Apresenta uma pequena demonstração.

---

4. Destrói todos os objectos que construíste.
Constrói as rectas r, s e t de equações gerais, respectivamente, $-5x -2y - 200 = 0$, $2x + 5y - 50 = 0$ e $6x + 15y + 400 = 0$.
Verifica que as rectas r e s são concorrentes. Verifica, também, que as rectas s e t são paralelas (não coincidentes).
Olhando para as equações gerais destas duas rectas paralelas, s e t, podemos observar a seguinte relação
$2/6 = 5/15$, entre os coeficientes de x e y respectivos. Será de estranhar esta relação de igualdade? Poderemos generalizá-la para todas as rectas paralelas? E se as rectas forem concorrentes?

5. Destrói todos os objectos que construiste.

Com base nas conclusões atrás tiradas, indica uma equação que defina uma recta paralela (mas não coincidente) à recta dada pela equação $5x + 2y + 50 = 0$.
Verifica recorrendo ao LOGOGEOMETRIA.

---

6. Destrói todos os objectos que construiste.

Qual é a posição relativa das rectas definidas pelas equações $10x + 6y - 350 = 0$ e $6x + 10y - 3 = 0$?
Verifica recorrendo ao LOGOGEOMETRIA.

---

7. Destrói todos os objectos que construiste.

Qual é a posição relativa das duas rectas definidas pelas equações $-5x + 15y - 4 = 0$ e $10x - 30y + 8 = 0$?

Verifica recorrendo ao LOGOGEOMETRIA.

Começo por te lembrar que estamos a trabalhar no referencial ortonormado do LOGO.GEOMETRIA. Chama o ficheiro GVA (LOAD "GVA) e o Módulo GEOMVECT.

1. Como ensinarias o LOGO.GEOMETRIA a determinar o ângulo das rectas r e s, definidas pelas equações $x + y - 50 = 0$ e $-2x + y - 70 = 0$, respectivamente, com base nos teus conhecimentos sobre Vectores e nos conhecimentos de Geometria Analítica que já adquiriste? Verifica se o valor encontrado por este teu processo está de acordo com o valor dado pelo LOGO.GEOMETRIA através do procedimento ANG.

DESENHA E EXPLICA O QUE FIZESTE.

2. Destrói todos os objectos que construíste.

Constrói a recta que passa pelo ponto A(40,10) e tem por declive $m = -4$.

DESENHA E EXPLICA O QUE FIZESTE.

3. Destrói todos os objectos que construíste.

Constrói a recta de equação $y = 3x + 40$. Tenta encontrar uma equação, a partir de vários casos que vais escolher, que represente a família das rectas de declive 3.

DESENHA E EXPLICA TUDO O QUE FIZESTE. NÃO TE ESQUEÇAS DE INDICAR AS TUAS CONCLUSÕES.

4. Destrói todos os objectos que construiste.

Como procederias para verificares que os pontos A(-10,30), B(10, 80), C(90,70) e D(70,20) são vértices consecutivos de um paralelogramo?

DESENHA E EXPLICA O CAMINHO QUE SEGUISTE.

---

5. Destrói todos os objectos que construiste.

INVENTA um problema semelhante a estes da ficha 7.
APRESENTA uma resolução do problema inventado por ti.

Começo por te lembrar que estamos a trabalhar no referencial ortonormado do LOGO.GEOMETRIA. Chama o ficheiro GVA (LOAD "GVA) e os Módulos GEOMVECT e GEOMCIRC.

1. Constrói a circunferência que contém os pontos A(100,40) e B(50,20) e cujo centro pertence à recta de equação y = x.

DESENHA E EXPLICA TUDO O QUE FIZESTE PARA CONSTRUIR A CIRCUNFERÊNCIA PEDIDA.

2. Destrói todos os objectos que construíste.
Constrói a circunferência que passa pelo ponto A(50,20) e é tangente à recta de equação y = x + 50 no ponto B(-20,30).

DESENHA E EXPLICA O QUE FIZESTE PARA CONSTRUIR A CIRCUNFERÊNCIA PEDIDA.

3. Destrói todos os objectos que construíste.
Constrói uma circunferência que passa pelos pontos A(10,20) e B(20,10) e que é tangente ao eixo das abcissas. Há mais circunferências, para além da que construíste, que satisfaçam as condições do enunciado? Quais? DESENHA E EXPLICA TUDO O QUE FIZESTE.

4. Destrói todos os objectos que construíste.

INVENTA UM PROBLEMA SEMELHANTE A ESTES DA FICHA 8.
APRESENTA UMA RESOLUÇÃO DO MESMO.

ANEXO 3

Mais alguns procedimentos do LOGO.GEOMETRIA referentes ao ficheiro GVA

Construtores		Módulos
FAZ.V.COORD "u [u1 u2]		GEOMVECT
FAZ.R.EQG "r [A B C]		GEOMVECT
FAZ.R.P.V "r "A "u		GEOMVECT
V.DA.RECTA "u "r		GEOMVECT
FAZ.C.EQG "c [A B C]		GEOMCIRC

Outros		
ESC.COORD.V "u		GEOMVECT
V.COLINEARES? [u v]	--> TRUE/FALSE	GEOMVECT
PROD.INT [u v]		GEOMVECT
PROJ.ORT.V [u v]		GEOMVECT
ANG.V [u v]		GEOMVECT
ESC.EQG.R "r		GEOMVECT
ESC.EQR.R "r		GEOMVECT
ESC.EQA.R "r		GEOMVECT
ESC.EQV.R "r		GEOMUTIL GEOMVECT
ESC.EQP.R "r		GEOMVECT
P.DA.CIRC? "P "c	--> TRUE/FALSE	GEOMCIRC
ESC.EQC.C "c		GEOMCIRC
ESC.EQG.C "c		GEOMCIRC
ESC.EQP.C "c		GEOMCIRC

ANEXO 4

Questionário aos Alunos

1. Como descreverias o LOGOGEOMETRIA para um colega de outra turma que não o conheça?

Explica-lhe para o que serve, no teu entender, o LOGOGEOMETRIA.

2. Consideras que o LOGOGEOMETRIA é de fácil ou difícil utilização? Porquê?

3. Que dizes das actividades matemáticas desenvolvidas nas aulas com o computador?

4. Achas que o computador deveria ser igualmente usado noutros capítulos do programa? Porquê?

ANEXO 5

GUIÃO-BASE PARA A ENTREVISTA AOS PROFESSORES

1. Elementos para o perfil do professor

- Idade
- Tempo de serviço
- Ano do início da leccionação
- Categoria profissional
- Habilitações académicas
- Funções exercidas dentro da escola
- O porquê da participação nesta experiência

2. Balanço pontual sobre o trabalho desenvolvido

a) Motivação e envolvimento dos alunos para o trabalho

- Houve alteração? Para melhor? Para pior? Indicação de casos reveladores dessa mudança.
- Maior participação nas aulas (mais perguntas; maior vontade para a execução das tarefas propostas pelo professor; mais iniciativa, ...)? Exemplos.
- Casos de desinibições de alunos? Exemplos.
- O professor descobriu capacidades nos alunos até então não reveladas? Exemplos.

b) Ambiente e organização criados na sala de aulas

- O ambiente criado com o LOGO.GEOMETRIA foi bom? Exemplos.
- O ambiente que existiu na sala de aula com os computadores foi bom? Exemplos.
- Houve alterações na relação aluno/aluno? Exemplos. E no trabalho em grupo? Exemplos.
- Houve alterações na relação professor/aluno? Exemplos.

c) A relação dos alunos com a Matemática

- Houve alteração quanto à maneira dos alunos encararem a Matemática? Exemplos.
- E quanto à sua aprendizagem? Exemplos.
- E quanto às demonstrações? Exemplos.
- E quanto à formulação e resolução de problemas? Exemplos.

3. <u>Características do programa LOGO.GEOMETRIA</u>

- O LOGO.GEOMETRIA é de aprendizagem fácil ou difícil? Justifica.
- O LOGO.GEOMETRIA é de utilização corrente fácil ou difícil? Justifica.
- O que é que te agrada mais no LOGO.GEOMETRIA? Justifica.
- O que é que te agrada menos no LOGO.GEOMETRIA? Justifica.

4. <u>Balanço geral</u>

- Quais as expectativas existentes no início dos trabalhos? Quais os receios?
- O programa (currículo) do 10º ano foi prejudicado? E o rendimento dos alunos? Os resultados finais foram bons?
- Este trabalho ajudou na introdução de certos conceitos? Justifica.
- Quais foram as maiores dificuldades sentidas ao longo do trabalho? Justifica.
- Ficaste com vontade de repetir a experiência? Utilizarias novamente o LOGO.GEOMETRIA? Continuarias a utilizar o computador 2 horas por semana? Alterarias a ordem sequencial dos conteúdos programáticos?

ERRATA

Página	Linha	Onde está	Deve estar
4	13	nove postulados	postulados
6	6	conduzem	conduz
6	-9	ligas	ligadas
7	-2	[AD]	[CB]
8	-1	[DC]	[BC]
13	2	o comprimento da medida de	o comprimento de
21	19/22/27	NIVEL	NÍVEL
24	16	com um única qualidade	com uma qualidade única
25	11	com	como
28	-8	prescrita "	prescrita
41	-8	demon-	demons-
47	9	vez	vez,
70	-10	u	$\vec{u}$
88	4	AD com AB	$\overrightarrow{AD}$ com $\overrightarrow{AB}$
88	5	AG com AB	$\overrightarrow{AG}$ com $\overrightarrow{AB}$
88	15	de nome u	$\vec{u}$
91	14	u	$\vec{u}$
95	7	u	$\vec{u}$
95	9	v = EF	$\vec{v} = \overrightarrow{EF}$
99	1	E	É
105	-2	GA4	GI4
106	-1	GA4,ACT3.4.3	GI4,ACT3.3
111	7	ângulo a	ângulo AOB

113	15/16	$\begin{matrix} a-x1 = x2-a \\ b-y1 = y2-b \end{matrix}$	$\begin{cases} a-x1 = x2-a \\ b-y1 = y2-b \end{cases}$
119	-1	A	À
130	-8	v	$\vec{v}$
143	11	A	À
149	5	aquela	àquela
149	17	resolvido,	resolvido
156	-4	u	$\vec{u}$
160	-9	diferentes	distintos
163	6	$\widehat{\vec{u}\ \vec{e1}}$	$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{e1}})$
163	8	$\widehat{\vec{u}\ \vec{e1}}$	$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{e1}})$
164	-2	$\widehat{\vec{u}\ \vec{e1}}$	$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{e1}})$
166	2	z=-e+4f	$\vec{z}=-\vec{e}+4\vec{f}$
167	4	vêm	vêem
168	8	E	É
169	6	E	É
170	7	E	É
171	-9	intuitiva	Intuitiva
177	9	O	Ó
178	11	apresentadas	apresentados
185	6	AM	$\overline{AM}$
194	20	por estêtica	por ser estêtica
194	-9	actividade 3	actividade 5
202	1	u	$\vec{u}$
206	-1	GA4,ACT4.3	GI6,ACT2.4
208	1	se	-se
209	-15	Gi6	GI6

210	-6	$a1 \neq a2$	$a1=a2$
210	-5	$a1 \neq a2$	$a1=a2$
210	-4	$b1-b2=0$	$b2-b1=0$
211	5	u	$\vec{u}$
211	-10	u	$\vec{u}$
212	10	O	Ó
219	-4	E	É
221	7	nais	mais
230	-6/-7	interesse principalmente pelas ... aulas devido	interesse pelas ...aulas principalmente devido
238	7	E	É
238	17	Ver	ver
238	18	Comprovar	comprovar
239	10	E	É
240	7	As	Às
250	3	permitiram	permitiu
250	14	válida),	válida)
260	-9	E?ducação	Educação
262	-1	Tefchnologye, 11, Nº 2	Technologye, 11, Nº 2, p. 163-167